

R1 eksamen H2024

14.11.24

Oversikt

Del 1 – 1 time – uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1	Derivasjon av eksponentialfunksjon	derivasjon, eksponentialfunksjoner	✓
1-2	Finne verdi programmet skriver ut	programmering, funksjonsdrøfting	✓
1-3	Eksponentiallikning med substitusjon	eksponentialfunksjoner, logaritmer, likninger	✓
1-4	Grenseverdi for rasjonalt uttrykk	grenseverdi, rasjonale funksjoner	✓
1-5	Koordinatvektorer, lengde og ortogonalitet	vektorer	✗
1-6	Identifiser funksjon fra vekstfart og derivert	gjennomsnittlig vekstfart, derivasjon, tolke grafer	✓

Del 2 – 4 timer – med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-1	Vannreservoar med eksponentiell funksjon	eksponentialfunksjoner, derivasjon, modellering	✗
2-2	Påstander om grenseverdi og deriverbarhet	grenseverdi, derivasjon, eksponentialfunksjoner	✗
2-3	Fiskepopulasjon og logistisk modell	eksponentialfunksjoner, logistisk funksjon, derivasjon, modellering	✗
2-4	Bestem grunntall i logaritmefunksjon	logaritmer, tolke grafer	✗
2-5	Omvendt funksjon fra graf	funksjoner, funksjonsdrøfting	✗
2-6	Posisjonsvektorer for småfugler og rovfugl	vektorer, derivasjon	✗

Del 1

Oppgave 1-1

Deriver funksjonen

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$$

✓ Løsningsforslag

Funksjonen består av en brøk med funksjoner i både teller og nevner, så vi må bruke kvotientregelen når vi deriverer.

$$f(x) = \frac{u}{v} \implies f'(x) = \frac{u'v + uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot x + e^{2x} \cdot 1}{x^2} = \underline{\underline{e^{2x} \frac{2x+1}{x^2}}}$$

Oppgave 1-2

Bruk en egnet strategi til å bestemme verdien som skrives ut når programmet nedenfor kjøres.

```

1 def O(x):
2     return -0.1*x**2 + 2000*x - 50000
3
4 x = 0
5
6 while O(x + 1) > O(x):
7     x = x + 1
8
9 print(x)
```

 Python

✓ Løsningsforslag

Jeg ser at programmet består av en funksjon $O(x)$ som muligens er en overskuddsfunksjon. **while**-løkka i programmet kjører så lenge $O(x+1) > O(x)$, altså kjører løkka så lenge $O(x)$ stiger. Inni løkka økes x -verdien med 1, altså vil programmet skrive ut x -koordinaten til toppunktet til $O(x)$.

Den enkleste måten å bestemme toppunktet på er å derivere O og sette lik null.

$$\begin{aligned}
 O'(x) &= -0,2x + 2000 \\
 -0,2x + 2000 &= 0 \\
 0,2x &= 2000 \\
 x &= 10\,000
 \end{aligned}$$

Programmet skriver ut 10 000.

Oppgave 1-3

Løs likningen

$$100^x - 3 \cdot 10^x = 4$$

✓ Løsningsforslag

Jeg ser at likningen består av tierpotenser.

$$\begin{aligned}
 100^x - 3 \cdot 10^x &= 4 \\
 (10^x)^2 - 3 \cdot 10^x - 4 &= 0
 \end{aligned}$$

Dette ser jeg at kan skrives som en andregradslikning hvor $u = 10^x$.

$$u^2 - 3u - 4 = 0 \implies \underbrace{(u-4)(u+1)}_{\text{Heltallsmetode}} = 0 \implies \underline{u = 4 \vee u = -1}$$

Vi bytter substituerer tilbake.

$$10^x = 4 \vee \underbrace{10^x = -1}_{10^x \text{ er positivt}}$$

$$\log 10^x = \log 4$$

$$x = \log 4$$

Løsningen er $x = \log 4$.

Oppgave 1-4

Finn grenseverdien hvis den eksisterer.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 18}$$

✓ Løsningsforslag

Vi ser at både teller og nevner går mot uendelig når $x \rightarrow \infty$. Vi kan altså bruke L'Hopitals regel.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 18} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{4} = \frac{2 + 0}{4} = \frac{1}{2}$$

Grenseverdien er $\frac{1}{2}$.

Oppgave 1-5

Fire vektorer er gitt ved $\vec{u} = [3, -2]$, $\vec{v} = [4, -6]$, $\vec{w} = [2, -3]$ og $\vec{p} = [8, 12]$

a) Avgjør om noen av vektorene er

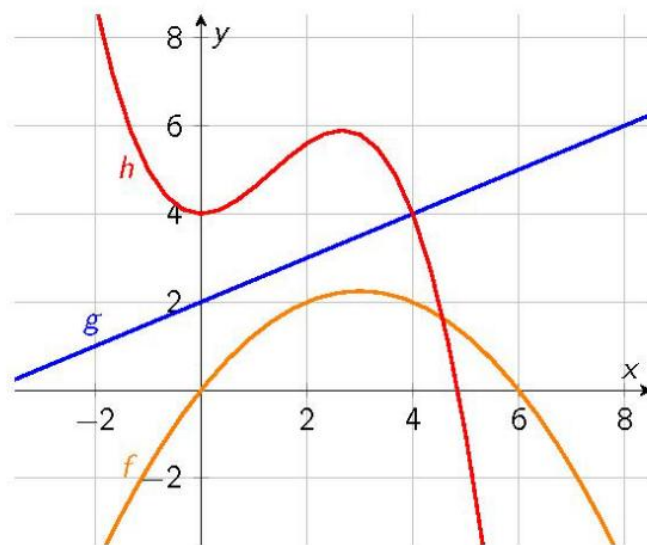
- like lange
- ortogonale

En vektor er gitt ved $\vec{q} = [2a - 3, 1 + 3b]$

b) Bestem a og b slik at $\vec{u} + 2\vec{q} = [7, 5]$

Oppgave 1-6

I koordinatsystemet nedenfor ser du grafene til tre funksjoner, f , g og h . En av funksjonene har gjennomsnittlig vekstfart lik $\frac{1}{2}$ i intervallet $[0, 4]$, og derivert lik 1 når $x = 1$.



Figur 1: Koordinatsystem med tre funksjoner f, g og h

Hvilken av funksjonene er dette? Husk å begrunne svaret ditt.

✓ Løsningsforslag

At den deriverte er lik 1 når $x = 1$ vil si at stigningstallet til tangenten til grafen når $x = 1$ skal være 1. Det utelukker funksjon g som har stigningstall $\frac{1}{2}$.

Funksjonen h har gjennomsnittlig har null i gjennomsnittlig vekstfart i intervallet $[0, 4]$, og dermed er også denne funksjonen utelukket.

Det er litt vanskelig å lese av stigningstallet til tangenten til f i $x = 1$, men det kan godt stemme at stigningstallet er 1. Den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[0, 4]$ er $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Funksjon f passer til beskrivelsen.

Del 2

Oppgave 2-1

Et gammelt vannreservoar lekket vann. Mengden vann i reservoaret V er gitt ved

$$V(t) = 10000 \cdot e^{-0,07t} + 500$$

Her er t antall timer etter lekkasjen startet, og mengden vann er målt i antall liter.

- Hvor lang tid vil det gå før vannmengden er halvert?
- Bestem $V'(12)$ og $V''(12)$. Gi en praktisk tolkning av svarene.
- Undersøk om V har asymptoter, og gi en praktisk tolkning av verdien til eventuelle asymptoter.

Oppgave 2-2

Avgjør om hver enkelt påstand nedenfor er sann eller usann. Forklar tydelig hvordan du har resonnert.

- Påstand:** Hvis $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ og $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, så er $f(x) = g(x)$.
- Påstand:** Funksjonen $f(x) = |x|$ er deriverbar for alle $x \in \mathbb{R}$, bortsett fra i $x = 0$.
- Påstand:** For likningen $a^x = a^y$, der $a \in \mathbb{R}$, er løsningen alltid $x = y$.

Oppgave 2-3

Forskere har registrert en ny fiskeart i en innsjø. I tabellen nedenfor ser du hvor mange fisk av arten det var i innsjøen noen måneder etter at arten først ble registrert.

Måneder etter første registrering	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Antall tusen fisk	1	2,5	5,5	9	14	22	32	45	60

Fiskepopulasjonen kan beskrives med en modell på formen

$$A(t) = A_0 \cdot k^t$$

der $A(t)$ er antall tusen fisk t måneder etter første registrering.

a) Bestem A_0 og k , og gi en praktisk tolkning av disse verdiene.

Fiskepopulasjonen kan også beskrives med en logistisk modell på formen

$$N(t) = \frac{B}{1 + \frac{B-N_0}{N_0}e^{-rt}}$$

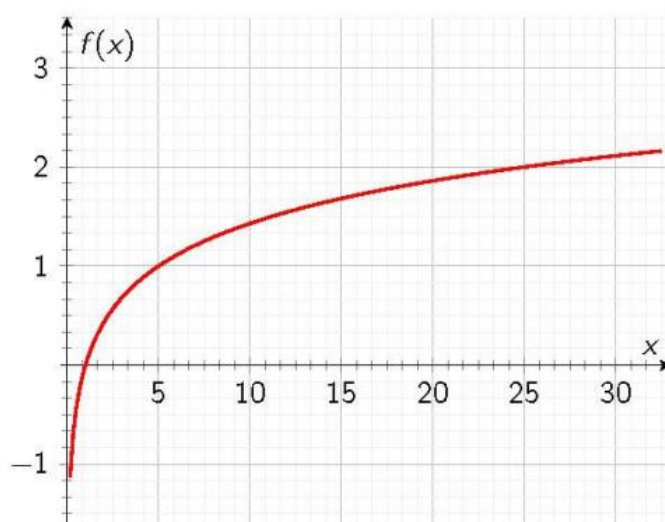
B er bæreevnen, N_0 er antall tusen fisk ved $t = 0$ og r er vekstparameteren.

- b) Bestem N_0 , B og r .
- c) Bestem den deriverte til funksjonene du fant i oppgavene a) og b). Forklar hvordan vekstfarten endrer seg ifølge hver av de to modellene.
- d) Hvilken modell mener du beskriver den praktiske situasjonen best? Hvor mange fisk vil det være 12 måneder etter første registrering, ifølge denne modellen?

Oppgave 2-4

I koordinatsystemet nedenfor ser du grafen til en funksjon f gitt ved

$$f(x) = \log_{a(x)}$$

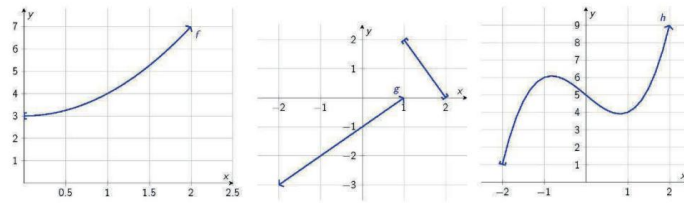


Figur 2: Graf av logaritmefunksjon med ukjent grunntall

Bestem a . Husk å argumentere for at svaret ditt er riktig.

Oppgave 2-5

Nedenfor ser du grafene til funksjonene f , g og h .



Figur 3: Grafene til f , g og h

- Avgjør og begrunn for hver av funksjonene om de har en omvendt funksjon.
- Bestem funksjonsuttrykket og definisjonsmengden til den omvendte funksjonen i de tilfellene den eksisterer.

Oppgave 2-6

To småfugler er ute og flyr. Posisjonen til de to fuglene er gitt ved

$$\vec{r}_1(t) = [-10 + 6t, 35 - 3t] \quad \text{og} \quad \vec{r}_2(t) = [2 + 5t, 4t]$$

Tiden t er målt i sekunder, og enhetene langs aksene er målt i meter.

- Hvor fort flyr hver av de to småfuglene?
- Hvor stor er avstanden mellom småfuglene når $t = 0$?
- På hvilket tidspunkt er småfuglene nærmest hverandre, og hvor langt unna hverandre er de da?

En rovfugl er også ute og flyr og oppdager småfuglene ved tidspunktet $t = 0$. Posisjonen til rovfuglen de første 6 sekundene er gitt ved

$$\vec{r}_R(t) = [7t - 10, 2t^2 - 6t + 5]$$

- Gjør nødvendige beregninger og beskriv jakten rovfuglen har på småfuglene.