

R1 eksamen V2024

24.05.24

Oversikt

Del 1 – 1 time – uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1	Derivasjon med produktregel og $\ln$	derivasjon, logaritmer	✗
1-2	Logaritmeligningen med substitusjon	logaritmer, likninger	✗
1-3	Grenseverdier av eksponentialfunksjon	eksponentialfunksjoner, grenseverdi	✗
1-4	Tre punkter på linje og rett vinklet trekant	vektorer, geometri, likninger	✗
1-5	Kontinuerlig funksjon med størst mulig definisjonsmengde	kontinuitet, funksjoner, delt forskrift	✗

Del 2 – 4 timer – med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-1	Influensa-epidemi og logistisk vekst	logistisk funksjon, derivasjon, asymptoter, modellering	×
2-2	Påstander om logaritme, derivasjon og invers	logaritmer, derivasjon, funksjoner, argumentasjon, delt forskrift	×
2-3	To biler på kryss og motorvei	vektorer, derivasjon, modellering	×
2-4	Momentmagnitudeskala og energi	logaritmer, eksponentialfunksjoner, modellering	×
2-5	Modell for drivstoffutvikling i Moss	regresjon, modellering, eksponentiell vekst	×
2-6	Innskrevet rektangel og Lars sitt program	derivasjon, programmering, funksjonsdrøfting	×
2-7	Pyramide i halvkule – størst mulig volum	geometri, derivasjon	×

Del 1

Oppgave 1-1

Deriver funksjonen.

$$f(x) = 4x^2 \cdot \ln(3x)$$

✓ Løsningsforslag

Vi ønsker å bruke produktregelen, men da må vi kunne derivere begge faktorene. Jeg må derivere $\ln(3x)$ ved å bruke kjerneregelen først ved å sette $u = 3x$

$$(\ln(3x))' = (\ln u)' \cdot u' = \frac{1}{u} \cdot 3 = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

Vi bruker produktregelen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^2)' \cdot \ln(3x) + 4x^2 \cdot (\ln(3x))' \\ &= 8x \cdot \ln(3x) + 4x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 8x \cdot \ln(3x) + 4x \\ &= 4x(2 \ln(3x) + 1) \end{aligned}$$

Oppgave 1-2

Løs likningen.

$$(\ln x)^2 - \ln x = 6$$

Oppgave 1-3

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = e^{-x+1}, \quad D_f = \mathbb{R}.$$

Bestem grenseverdiene $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ dersom de eksisterer.

Oppgave 1-4

Vi har gitt tre punkter $A(3, 4)$, $B(-1, -2)$ og $C(3 + t, 2t)$ der $t \in \mathbb{R}$.

- Bestem t slik at punktene A , B og C ligger på en rett linje.
- Bestem t slik at punktene A , B og C danner en trekant slik at $\angle C = 90^\circ$.

Oppgave 1-5

En funksjon f er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - x, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Gi funksjonen f en ny definisjonsmengde slik at følgende er oppfylt samtidig:

- f skal være kontinuert.
- Den nye definisjonsmengden skal være så stor som mulig.
- Verdimengden til f skal være uendret.

Del 2

Oppgave 2-1

En influensaepidemi bryter ut på en videregående skole med 1000 elever. I starten er det få smittede, men antallet øker raskt. Antallet smittede elever $S(t)$ etter t dager er tilnærmet gitt ved

$$S(t) = \frac{300}{1 + 28 \cdot e^{-0,3t}}.$$

- Hvor lang tid tar det før 100 elever er smittet?
- På hvilket tidspunkt blir flest elever smittet, og hvor raskt sprer smitten seg da?

- c) Undersøk om S har asymptoter, og forklar hvilken praktisk tolkning asymptotene eventuelt har.

Oppgave 2-2

Avgjør om hver av påstandene nedenfor er sann eller usann. Forklar tydelig hvordan du har resonnert.

- a) **Påstand:** Når $x > 0$, er $e^{k \cdot \ln(x)} = x^k$.
- b) En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2, & x < 2 \\ 3x^2 - 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

Påstand: Funksjonen er deriverbar i $x = 2$.

- c) **Påstand:** En funksjon som er både minkende og voksende i definisjonsmengden sin, kan ha en omvendt funksjon.

Oppgave 2-3

To biler, A og B, kjører på hver sin vei. Posisjonen til bil A er gitt ved $\vec{r}_A(t)$, og posisjonen til bil B er gitt ved $\vec{r}_B(t)$, der

$$\vec{r}_A(t) = \left[\frac{1}{2}(t-4), t \right] \quad \text{og} \quad \vec{r}_B(t) = \left[\frac{1}{2}t, \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{5}\right) \right].$$

Her er t tiden målt i minutter, og avstandene er målt i kilometer.

- a) Bestem avstanden i luftlinje mellom bilene etter 1 minutt.

En av veiene er en motorvei. Den andre veien er en vei med lavere fartsgrense.

- b) Gjør beregninger og argumenter for hvilken av bilene som er på motorveien.

Veiene krysser hverandre i et veikryss.

- c) Gjør beregninger og argumenter for hvilken av bilene som kommer til veikrysset først.

Oppgave 2-4

Momentmagnitudeskalaen er en skala for å måle størrelsen på jordskjelv. Sammenhengen mellom momentmagnituden M og energien E er

$$M = \frac{2}{3} \lg(E) - 3,2.$$

Energien E måles i joule (J).

- a) Bestem et uttrykk for energien E som løses ut i et jordskjelv, uttrykt ved momentmagnituden M .
Bruk dette uttrykket til å regne ut hvor mye energi som løses ut i et jordskjelv som måler 4,7 på momentmagnitudeskalaen.
- b) Hvor mange ganger så stor er energien som løses ut i et jordskjelv, dersom M øker med 1?

Oppgave 2-5

Det har vært en stor endring i hvilken type drivstoff bilene i Norge bruker. Statistisk sentralbyrå samler inn data om dette, og tabellen viser en oversikt over typen drivstoff til registrerte personbiler i Moss i perioden 2010–2022.

- a) Bruk opplysningene i tabellen til å lage modeller du mener beskriver utviklingen i drivstofftypene bensin og elektrisk («El.») t år etter 2010. Argumenter for valg av modeller.

- b) Ut fra modellene du har laget, hvordan vil du vurdere veksten i drivstofftypene bensin og elektrisk i årene framover, etter 2022? Kommenter gyldigheten til modellene dine.

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Personbiler													
K-3103 Moss													
Bensin	14 185	13 592	13 246	12 944	12 578	12 367	11 472	11 079	10 516	10 323	9 706	9 210	8 705
Diesel	5 756	6 791	7 590	8 308	8 973	9 609	9 913	10 055	9 967	9 908	9 406	8 931	8 533
Parafin	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Gass	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	3	2
El.	2	14	35	111	307	557	754	1 071	1 467	2 057	2 810	4 031	5 363
Annet drivstoff	1	1	1	16	8	9	803	1 209	1 613	2 006	2 491	3 060	3 414

^ Fotnoter

Annet drivstoff inneholder hovedsakelig hybrid.

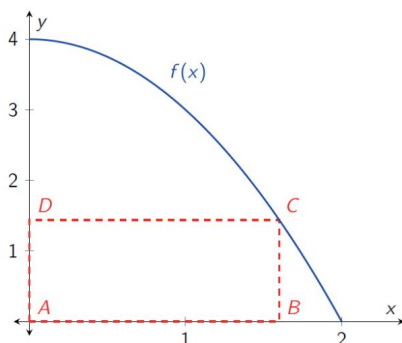
Figur 1: Personbiler per drivstofftype i Moss. Kilde: Skjermddump av ssb.no, utdrag fra tabell 07849

Oppgave 2-6

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = -x^2 + 4, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Lars har tegnet grafen til f med et innskrevet rektangel $ABCD$. Lars har også skrevet et program.



Figur 2: Grafen til $f(x)$

```

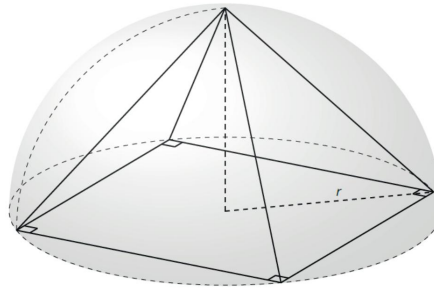
1 def f(x):
2     return -x**2 + 4
3
4 def areal(x):
5     return x*f(x)
6
7 h = 0.0001
8 def der_areal(x):
9     return (areal(x + h) - areal(x))/h
10
11 x = 0
12 dx = 0.01
13 while der_areal(x + dx) > 0:
14     x = x + dx
15
16 print(areal(x))

```

- Forklar hva Lars prøver å finne ut med programmet. Hva blir svaret hvis man kjører programmet?
- Hvilken strategi bruker Lars i programmet sitt? Vil strategien fungere uavhengig av hvilken funksjon f er?

Oppgave 2-7

En kule med radius r deles i to like deler. Vi skal skjære ut en pyramide med rektangulær grunnflate av den ene halvkulen. Grunnflaten skal ligge i snittflaten til halvkulen.



Figur 3: Halvkule med innskrevet pyramide

Volumet av en pyramide er gitt ved

$$V = \frac{h \cdot G}{3},$$

der G er grunnflaten og h er høyden til pyramiden.

Bestem et uttrykk for det største volumet en slik pyramide kan ha.