

R1 eksamen V2025

19.05.25

Oversikt

Del 1 – 2 timer – uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1	Derivasjon av eksponential og potensfunksjon	derivasjon, eksponentialfunksjoner	✗
1-2	Nullpunkter og ekstremalpunkter med produkt	derivasjon, funksjonsdrøfting	✗
1-3	Eksponential- og logaritmefunksjoner	eksponentialfunksjoner, logaritmer	✗
1-4	Grenseverdier med algebraisk forenkling	grenseverdi	✗
1-5	Kontinuitet og deriverbarhet stykkevis	kontinuitet, derivasjon	✗
1-6	Vektorer og basketball	vektorer, geometri	✗

Del 2 – 3 timer – med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-1	Logistisk vekstmodell batteriteknologi	logistisk funksjon, modellering, derivasjon	✗
2-2	Omvendt funksjon og tangentlikninger	funksjoner, derivasjon	✗
2-3	Stykkevis funksjon med ukjent uttrykk	kontinuitet, derivasjon, funksjoner, delt forskrift	✗
2-4	Fiskebåt og vektorbevegelse	vektorer, modellering	✗
2-5	Tangent til $\ln$ og trekantareal	logaritmer, derivasjon, areal	✗

Del 1

Oppgave 1-1

Deriver funksjonen f gitt ved

$$f(x) = e^{-2x} + \frac{1}{5}x^5 - 2\pi$$

Oppgave 1-2

En funksjon g er gitt ved $g(x) = \frac{1}{2}e^x 2x - 1^2$

- Bestem eventuelle nullpunkter til funksjonen g .
- Vis at $g'(x) = \frac{1}{2}e^{x(2x-1)}(2x+3)$
- Finn koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til g .

Oppgave 1-3

Løs likningene

- $3^{3x+2} - 5 = 76$
- $3 \lg x + 2 \lg x^2 + \lg \frac{1}{x^9} = 2$

Oppgave 1-4

Bestem grenseverdiene

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x^2 - 3)}{x - 3}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

✓ Løsningsforslag

- a) Vi ser at nevneren går mot null når $x \rightarrow 3$, mens telleren går mot $3 \cdot 3 = 9$.

La oss se hva som skjer når vi nærmer oss 3 fra venstre side. Jeg velger $x = 2,5$ for å få en følelse for tallene.

$$\frac{3(2,5^2 - 3)}{2,5 - 3} = \frac{3(6,25 - 3)}{-0,5} = \frac{3 \cdot 3,25}{-0,5} = -19,5$$

Hvis vi hadde valgt en verdi nærmere 3 ville fått et enda mer ekstremt negativt svar.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3(x^2 - 3)}{x - 3} = -\infty$$

Når vi nærmer oss 3 fra høyre side så får vi (vi velger 3,5)

$$\frac{3(3,5^2 - 3)}{3,5 - 3} = \frac{3(12,25 - 3)}{0,5} = \frac{3 \cdot 9,25}{0,5} \approx 55$$

Hvis vi hadde valgt et tall nærmere 3 ville vi fått et enda mer ekstremt positivt svar.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x^2 - 3)}{x - 3} = \infty$$

Grenseverdien eksisterer ikke siden grenseverdiene fra venstre og høyre side ikke stemmer overens.

Oppgave 1-5

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ 2e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Avgjør om f er kontinuert i $x = 0$.
 b) Avgjør om f er deriverbar i $x = 0$.

Oppgave 1-6

Jelena, Nils og Ahmad spiller basketball. Tenk deg at vi legger et koordinatsystem over banen. Ved et tidspunkt befinner Jelena seg i punktet $J(0, 0)$, Nils befinner seg i punktet $N(-1, 2)$, og Ahmad befinner seg i punktet $A(1, 1)$. Enheten langs aksene er meter.

- a) Hvor langt er det mellom Nils og Ahmad? Gi svaret eksakt.

En basketball ligger i punktet $(-1, a)$, der $a \in \mathbb{R}$. Vektoren som går fra Jelena til ballen, er parallell med vektoren som går fra Nils til Ahmad.

- b) Bestem a .

Nils flytter seg til et nytt punkt M . M er det nærmeste punktet som er plassert slik at avstanden mellom Jelena og Nils er $\sqrt{10}$ meter. Vinkelen mellom Nils, Ahmad og Jelena, $\angle MAJ$, er 90 grader.

- c) Bestem koordinatene til M .

Del 2

Oppgave 2-1

Teknologiselskapet PowBat skal lansere en ny batteriteknologi i en by med 3 millioner husstander. PowBat regner med at antallet husstander som har batteriet t uker etter lanseringen, vil følge modellen S gitt ved

$$S(t) = \frac{2\,500\,000}{1 + 2500 \cdot e^{-0,08t}}$$

- a) Hvor lang tid vil det ta før halvparten av husstandene i byen har batteriet, ifølge modellen?
b) Bestem $S'(52)$. Gi en praktisk tolkning av svaret.

Det viser seg at konkurrenten BA3 planlegger å lansere et batteri med tilsvarende teknologi samtidig. Dette vil påvirke salget til PowBat.

Etter å ha hørt om planene til BA3 antar PowBat at

- de totalt vil få solgt batteriet sitt til 1,5 millioner husstander
 - 500 husstander har batteriet når det lanseres
 - flest nye husstander kjøper batteriet i uke 60
- c) Bruk antakelsene ovenfor til å finne en ny logistisk modell F for antallet husstander som har batteriet etter t uker.

Oppgave 2-2

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 1$$

og har definisjonsmengden $I = [a, b]$ der $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) Bestem det største intervallet I , slik at f har en omvendt funksjon g når $2 \in I$.
b) Bestem stigningstallet til tangenten til grafen til g i punktet $(-10, 3)$.
c) Grafen til g har en annen tangent med samme stigningstall som tangenten i punktet $(-10, 3)$. Bestem koordinatene til tangeringspunktet.

Oppgave 2-3

Amalie arbeider med en funksjon f med delt forskrift og skal vise funksjonsuttrykket til de andre i klassen. Dessverre har hun sølt på arket sitt og klarer ikke å lese alt som står der.

$$f(x) = \begin{cases} -9x - 15, & x \leq -2 \\ \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare, & -2 < x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - x - \frac{7}{2}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Hun husker at f er kontinuert og deriverbar for alle $x \in \mathbb{R}$. Hun husker også at det midterste uttrykket er et tredjegradspolynom.

Bruk dette til å bestemme hele funksjonsuttrykket til f .

Oppgave 2-4

Posisjonen $\vec{r}$ til en fiskebåt t timer etter at den drar fra land, er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [1 + 5t, 4 + 8t]$$

Enhetene langs aksene er kilometer.

Farten til en båt måles vanligvis i knop, der 1 knop er 1852 meter per time.

- a) Bestem farten til fiskebåten i knop.

Et fyr står i posisjonen $(4, 7)$.

- b) Bestem den minste avstanden mellom fiskebåten og fyret.

En fiskestim er i punktet $(1, -3)$ ved tiden $t = 0$, og stimen svømmer med hastigheten $\vec{v}(t) = [4, 11]$.

- c) Vil fiskebåten treffe fiskestimen?

En annen fiskebåt er i punktet $(-2, 0)$ ved tiden $t = 0$ og holder konstant fart i retning langs $\vec{u} = [6, 4]$.

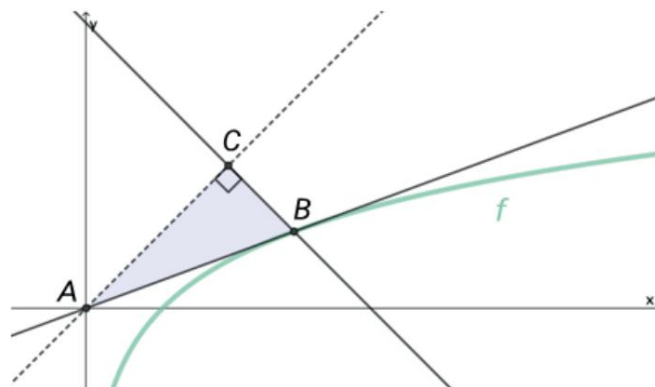
- d) Bestem farten denne fiskebåten må holde for å treffe fiskestimen.

Oppgave 2-5

Nedenfor ser du grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = \ln x$.

Et punkt B på grafen til f er plassert slik at tangenten til grafen i punktet B går gjennom $A(0, 0)$.

Punktet C er plassert på linja $y = x$ slik at $\angle ACB = 90^\circ$.



Figur 1: Grafen til $f(x) = \ln x$ med punkt B, tangent og trekant ABC

- a) Bestem eksakte verdier for koordinatene til punktet B.
b) Bestem det eksakte arealet av trekant ABC.