

R2 eksamen H2024

20.11.24

Oversikt

Del 1 – 2 timer – uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1	Integral med delvis integrasjon og trigonometri	integral, trigonometri	✓
1-2	Sumformel, kvotient og geometrisk rekke	rekker, uendelig rekke	✓
1-3	Telt med vektorer i rommet	vektorer, areal	✓
1-4	Radianer og eksakte trigonometriske verdier	trigonometri, enhetssirkel	✓
1-5	Sinus-funksjon og cosinusfunksjon	trigonometri, funksjoner	✓

Del 2 – 3 timer – med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-1	Ball i be- vegelse med posi- sjonsvek- tor	vektorer, deriva- sjon	✓
2-2	Vurder påstander om rekke, plan og areal	rekker, vektorer, integral, argu- mentasjon	✓
2-3	Jord- bær som omdrei- ningsle- geme	integral, volum, omdreiningsle- geme	✓
2-4	Russebil med tri- gonomet- risk farts- funksjon	trigonometri, integral, deriva- sjon	✓
2-5	Rekursiv formel og program- mering	programmering, rekursiv sam- menheng	✓
2-6	Omdrei- ningsle- geme av sirkel om y-aksen	integral, volum, omdreiningsle- geme, bevis	✓

Del 1

Oppgave 1-1

- Regn ut integralet $\int x^2 \cdot \ln x \, dx$
- Bestem x når $\int_0^x \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) dt = 0$ og $x \in \langle 0, \pi \rangle$.
- Gi en praktisk tolkning av svaret i oppgave b).

Oppgave 1-2

- Finn summen av den aritmetiske rekken $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 399$.
- Bestem kvotienten k for en uendelig geometrisk rekke som konvergerer og som har $a_1 = 12$ og sum = 18.
- Vis at tallet $0,757\,575\,75 \dots$ kan skrives som en uendelig geometrisk rekke. Bruk dette til å vise at $1,757\,575\,75 \dots = \frac{58}{33}$.

Oppgave 1-3

Et telt står i en plan skråning. Teltet har tre rette teltstenger som er plassert i punktene $A(0, 0, 0)$, $B(3, 1, 2)$ og $C(-1, 3, 1)$. De tre teltstengene er samlet i toppunktet T .

- a) Bestem arealet av bunnen i teltet.

Lengden av teltstanga fra punkt C til punkt T er $\sqrt{17}$. Teltstanga fra punkt A til punkt T følger linja ℓ , gitt ved

$$\ell : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$$

- b) Bestem koordinatene til toppunktet T .

Oppgave 1-4

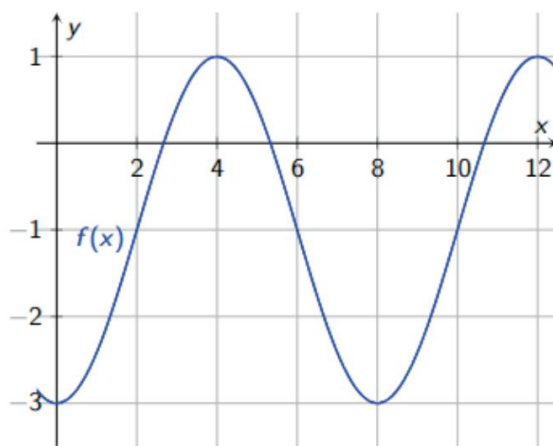
- a) Hva er definisjonen av det absolutte vinkelmålet (radianen) til en vinkel? Hvor mange radianer er 80° ?

- b) Finn de eksakte verdiene til $\cos v$ og $\tan v$ når $\sin v = -\frac{1}{4}$ og $v \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Oppgave 1-5

Figuren viser grafen til funksjonen

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$$



Figur 1: Grafen til $f(x)$

- a) Bestem en funksjon på formen $g(x) = A \cdot \cos(cx + \varphi) + d$, som passer til grafen.
- b) Løs likningen $\cos\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right) = \frac{1}{2}$, der $x \in [0, 3\pi]$. Forklar hvor på figuren løsningene ligger.

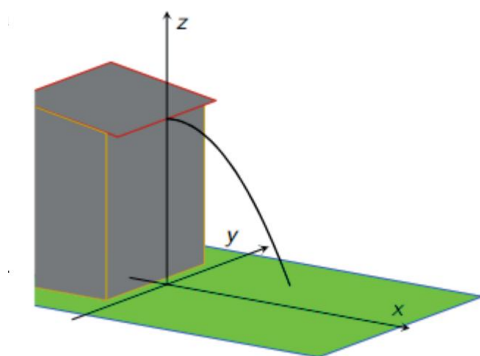
Del 2

Oppgave 2-1

En ball ruller av taket på et hus og ned på bakken. Vi plasserer et koordinatsystem slik at

- y -aksen ligger på bakken parallelt med husveggen
- x -aksen ligger på bakken, står vinkelrett på husveggen og skjærer y -aksen der ballen forlater hustaket

- z -aksen angir høyden over bakken med positiv retning oppover



Figur 2: Koordinatsystem med hus og ball

Måleenheten på aksene er meter.

Posisjonen til ballen er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [2t, 4t, 6 - 0,7t - 4,9t^2]$$

der t er antall sekunder etter at ballen forlater taket.

- Hvor høyt over bakken er kanten på taket? Hva er posisjonen til ballen etter 0,5 s?
- Bestem farten til ballen når den treffer bakken.
- Ved hvilket tidspunkt er farten til ballen 10 m/s?

Oppgave 2-2

Avgjør om hver enkelt påstand nedenfor er sann eller usann. Forklar tydelig hvordan du har resonnert.

- Påstand:** Likningen til et plan kan alltid bestemmes av 3 punkter i planet.
- En uendelig geometrisk rekke er gitt ved $1 + (\ln x - 1) + (\ln x - 1)^2 + \dots$

Påstand: Dersom $x = \frac{1}{e}$ vil summen av rekka være $\frac{1}{3}$.

- To funksjoner er gitt ved $f(x) = x^3 - x^2 - ax$, der $a \in \mathbb{R}$, og $g(x) = -x^2 + x$.

Påstand: Grafene til f og g avgrenser to områder som er like store når $a > -1$.

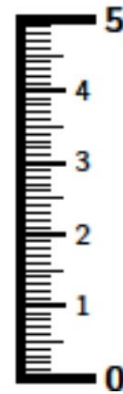
Oppgave 2-3

Bildene er ikke i målestokk

I det originale eksamenssettet er bildene i målestokk 1:1, men det er vanskelig å få til her. Ved å måle på arket har jeg funnet av avstanden fra bunnen til toppen (i y -retning på arket) er omtrent 4,4 cm.



Figur 3: Tverrsnitt av jordbær i målestokk 1:1



Figur 4: Linjal i målestokk 1:1

Bildet viser tverrsnittet av et jordbær i målestokk 1:1. Bruk integrasjon og omdreiningslegeme til å beregne volumet av hele jordbæret. Kommenter formen på omdreiningslegemet ditt og vurder svaret.

Oppgave 2-4

Anders og Ivana har kjøpt seg russebil. De skal kjøre bilen til en garasje, men på turen begynner motoren å fuske. Farten v følger funksjonen

$$v(t) = -6 \sin\left(360t - \frac{\pi}{2}\right) + 54$$

Her er v gitt i km/t, og t er antall timer etter at motoren har begynt å fuske.

- Bestem det første tidspunktet gjennomsnittsfarten blir 54 km/t.
- På hvilke tidspunkt har bilen størst akselerasjon når den kjører med farten v ? Hvor stor er denne akselerasjonen?

Når bilen begynner å fuske, er det 2 km til garasjen som bilen skal parkeres i.

- Hvor lenge må Anders og Ivana kjøre for å komme til garasjen, når bilen kjører med farten v ?

Oppgave 2-5

- Bestem en rekursiv formel for tallfølgen 1, 2, 6, 15, 31, 56, ...
- Bruk den rekursive formelen du fant i oppgave a), og lag et program som regner ut summen av de 30 første leddene i tallfølgen.

Husk å legge ved bilde av både koden og resultatet av kjøringen.

Oppgave 2-6

En sirkel har sentrum i $S(a, 0)$ og har radius $R < a$. Sirkelen roteres om y -aksen.

Vis at volumet av omdreiningslegemet blir $2\pi^2 R^2 a$.