

R2 eksamen V2024

27.05.24

Oversikt

Del 1 — 2 timer — uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1	Bestemt integral og areal	integral, areal under graf	✓
1-2	Ubestemt integral med substitusjon	integral	✗
1-3	Ukjent program S2 v24	programmering, rekker	✓
1-4	Trekant og plan i rommet	vektorer, geometri	✗
1-5	Sinus-funksjon og egen-skaper	trigonometri, funksjoner	✗

Del 2 — 3 timer — med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-1	Fotball hjørne- spark og vektorer	vektorer, model- lering	×
2-2	Volum av pære med omdreiningsle- game	omdreiningsle- game, integral, volum	×
2-3	Sensor for utelys og trigono- metri	trigonometri, modellering, de- rivasjon	×
2-4	Kubikk- tall og in- duksjons- bevis	rekursiv sam- menheng, figur- tall, program- mering, bevis	×
2-5	Kuleflate og plan	vektorer, geometri	×
2-6	Sum av integral- rekke	rekker, uende- lig rekke, ut- forskning, funk- sjoner, integral	×

Del 1

Oppgave 1-1

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = -x^3 + 3x$$

- a) Regn ut integralet

$$\int_{-1}^0 f(x) dx$$

- b) Bestem arealet av området som er avgrenset av grafen til f , x -aksen og linjene $x = -1$ og $x = 1$

✓ Løsningsforslag

a)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 (-x^3 + 3x) dx \\ & \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 \\ & 0 - \left(-\frac{1}{4}(-1)^4 + \frac{3}{2}(-1)^2 \right) \\ & -\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right) = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Integralet er $-\frac{5}{4}$.

b) Jeg finner først nullpunktene ved å faktorisere uttrykket.

$$f(x) = -x^3 + 3x = -x(x^2 - 3) = -x(x^2 - (\sqrt{3})^2) = -x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

Vi har nullpunkter når $f(x) = 0$. Det vil si at vi har nullpunkter når $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$. Det er kun nullpunktet $x = 0$ som ligger mellom $x = -1$ og $x = 1$.

For å finne ut om funksjonen er positiv eller negativ i intervallene så sjekker jeg funksjonsverdien i $x = -1$ og $x = 1$.

$$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) = 1 - 3 = -2$$

$$f(1) = -(1)^3 + 3 \cdot 1 = -1 + 3 = 2$$

>[!tip]- Alternativ måte å sjekke hvor funksjonen er positiv og negativ > >Siden integralet $\int_{-1}^0 f(x) dx < 0$ og det ikke finnes noen nullpunkter for $x \in \langle -1, 0 \rangle$, så må f være negativ når $x \in \langle -1, 0 \rangle$

f er altså negativ i intervallet $[-1, 0]$ og positiv i intervallet $[0, 1]$. Vi finner arealet ved å ta integralene av hver del (og husker minustegn foran integralet til området som ligger under x -aksen).

$$A = -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

$$A = -\left(-\frac{5}{4}\right) + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$

$$A = \frac{5}{4} + -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Arealet av området er $\frac{5}{2}$.



Antisymmetri

Du kan utnytte antisymmetrien til f til å argumentere for at arealet avgrenset av $x = -1$, f , x -aksen og $x = 0$ vil være like stort som arealet avgrenset av f , x -aksen, $x = 0$ og $x = 1$.

Oppgave 1-2

Regn ut integralet.

$$\int \sin^3(x) \cdot \cos(x) dx$$

✓ Fasit

Oppgave 1-3

En elev har laget programmet under.

```
1 n = 0
2 S = 0
3
4 while S <= 200:
5     n = n + 1
6     S = S + 4*n - 2
7
8 print(n)
```

Python

- Forklar hva eleven prøver å finne ut.
- Finn verdien eleven får skrevet ut når programmet kjøres.

✓ Løsningsforslag

- Programmet viser en aritmetisk følge hvor hvert ledd er gitt av $a_n = 4n - 2$ for $n > 0$. Programmet regner ut delsummene, S_n , til den tilhørende rekka.

Programmet finner ut hvilket ledd i rekka som gjør at delsummen blir over 200.

- Siden tallfølgen er aritmetisk kan vi regne ut summen av de n første leddene med

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Jeg vet at summen skal være over 200, at $a_1 = 2$ og jeg kan erstatte a_n med $4n - 2$. Dette gir

$$200 = \frac{2 + 4n - 2}{2} n$$

$$200 = 2n^2$$

$$100 = n^2$$

$$10 = n$$

$n = 10$ gir oss altså nøyaktig delsummen $S_{10} = 200$. $n = 11$ gir oss den første delsummen som er over 200.

Programmet skriver ut 11.

Oppgave 1-4

Vi har gitt punktene $A(1, 1, 0)$, $B(4, 1, 1)$ og $C(2, 0, -1)$.

- Bestem arealet av trekanten $\triangle ABC$.

b) Bestem avstanden fra punktet C til linja gjennom A og B .

A , B og C ligger i planet α . Punktet P har koordinatene $P(-2, 1, 4)$.

c) Lag en parameterframstilling for linja ℓ som går gjennom punktet P og står vinkelrett på planet α .

En rett linje m går gjennom punktet P , er parallell med planet α og skjærer z -aksen i punktet D .

d) Bestem koordinatene til D .



Oppgave 1-5

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right) - 1, \quad D_f = \langle 0, 20 \rangle.$$

a) Løs likningen $f(x) = 0$.

b) Finn amplituden, likevektslinja, perioden og forskyvningen langs likevektslinja.



Del 2

Oppgave 2-1

En fotballspiller skal ta et hjørnespark (corner) på en fotballbane. Posisjonen $\vec{r}$ til ballen etter t sekunder er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [30t, 5t, 7t - 4,9t^2].$$

Her er posisjonen gitt i meter, og koordinatsystemet er lagt slik at origo er i hjørnet av fotballbanen, x -aksen går langs kortsiden og y -aksen går langs langsiden.

a) Hvor stor er farten til ballen idet den blir skutt?

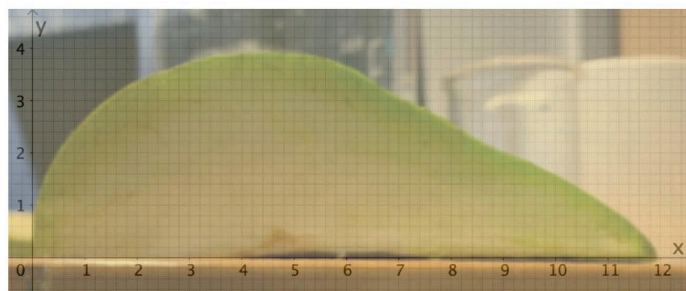
b) Hvor langt fra hjørnemerket er ballen når den treffer fotballbanen igjen?

c) Hvor stor er farten til ballen når den er på sitt høyeste? Hvor høyt over fotballbanen er ballen da?



Oppgave 2-2

Bildet nedenfor viser halve snittflaten til en pære som er skåret over på midten. Bildet er satt inn i et koordinatsystem. Enheten langs begge aksene er centimeter.



Figur 1: Pæresnitt i koordinatsystem

Bruk informasjonen i bildet til å bestemme det omtrentlige volumet av pæra.

✓ Fasit

Oppgave 2-3

En sensor skal slå på utelyset foran ytterdøra til et hus. Lyset blir slått på $T(x)$ timer etter midnatt. $T(x)$ er gitt ved

$$T(x) = 4 \cdot \sin(0,0055\pi \cdot x - 0,5\pi) + 19.$$

x er antall dager etter 31. desember 2023 slik at $x = 1$ svarer til 1. januar 2024. Tidspunktet sensoren slår på utelyset, varierer fra kl. 15:00 til kl. 23:00, og det varierer periodisk i løpet av et år. Den 1. april slår lyset seg på kl. 19:00.

- Forklar hvordan de ulike verdiene i modellen $T(x)$ passer med opplysningene gitt ovenfor.
- Når i 2024 vil tidspunktet da lyset slår seg på, flytte seg 3 minutter per dag?
- Når endrer dette tidspunktet seg raskest, og hvor stor er endringen da?

✓ Fasit

Oppgave 2-4

De fem første kubikktallene er $1^3, 2^3, 3^3, 4^3$ og 5^3 , se figuren over. La S_n være summen av de n første kubikktallene.

- Beskriv den rekursive sammenhengen mellom S_n og S_{n+1} . Bestem en eksplisitt formel for S_n .
- Lag et program som regner ut S_{50} ved å bruke den rekursive sammenhengen du fant i oppgave a.
- Bruk induksjonsbevis til å bevise den eksplisitte formelen for S_n .

✓ Løsningsforslag

- Jeg setter opp de første leddene og ser om jeg finner en rekursiv sammenheng som jeg kan bruke.

$$S_1 = 1^3$$

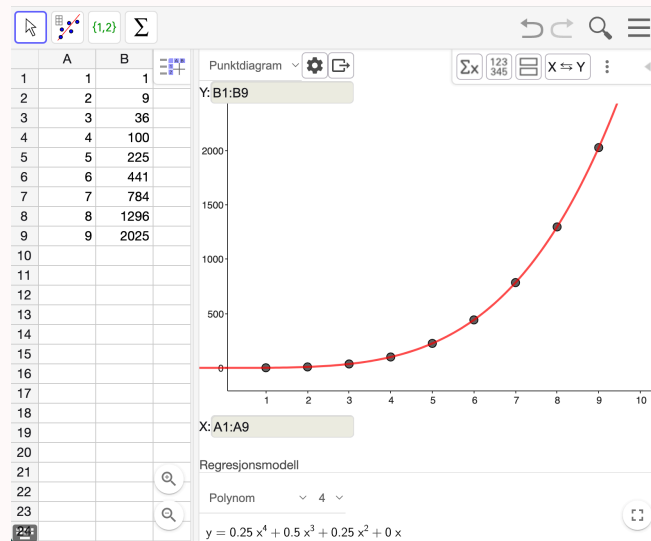
$$S_2 = 1^3 + 2^3 = S_1 + 2^3$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = S_2 + 3^3$$

Jeg ser at hvert ledd er det forrige leddet, pluss det neste kubikktallet. En rekursiv sammenheng mellom summene er altså

$$\underline{\underline{S_{n+1} = S_n + (n+1)^3}}$$

For å bestemme en eksplisitt formel brukte jeg regresjon i GeoGebra.



En eksplisitt formel for summene er

$$\underline{\underline{S_n = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2)}}$$

b) Jeg bruker følgende program

```
1 S = 0 # starter summen på 0
2
3 for n in range(1, 51):
4     # kjører løkka 50 ganger
5     S = S + n**3 #legger n^3 til S
6
7 print(S)
```

Programmet gir at $S_{50} = 1\,625\,625$.

Oppgave 2-5

Punktene $A(1, 2, 1)$ og $B(3, 0, -3)$ ligger på en kuleflate. AB er en diameter til kuleflaten. Planet γ er gitt ved likningen $x + 2y + 2z = 14$.

a) Finn den minste avstanden fra kuleflaten til planet γ .

Et plan α har samme avstand til kuleflaten og er parallelt med planet γ .

b) Bestem en likning for planet α .



Oppgave 2-6

La $a_1 > 0$ og la $S(x)$ være summen av ei rekke gitt ved

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_1 \cdot \left(\int_0^x e^{-t} dt \right)^n$$

Bestem a_1 slik at den minste mulige summen blir 1.