

R2 eksamen V2024

27.05.24

Oversikt

Del 1 — 2 timer — uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1	Bestemt integral og areal	integral, areal under graf	✓
1-2	Ubestemt integral med substitusjon	integral	✗
1-3	Ukjent program S2 v24	programmering, rekker	✓
1-4	Trekant og plan i rommet	vektorer, geometri	✗
1-5	Sinus-funksjon og egen-skaper	trigonometri, funksjoner	✗

Del 2 — 3 timer — med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-1	Fotball hjørne- spark og vektorer	vektorer, model- lering	×
2-2	Volum av pære med omdreiningsle- ningsle- game	omdreiningsle- game, integral, volum	×
2-3	Sensor for utelys og trigono- metri	trigonometri, modellering, de- rivasjon	×
2-4	Kubikk- tall og in- duksjons- bevis	rekursiv sam- menheng, figur- tall, program- mering, bevis	×
2-5	Kuleflate og plan	vektorer, geometri	×
2-6	Sum av integral- rekke	rekker, uende- lig rekke, ut- forskning, funk- sjoner, integral	×

Del 1

Oppgave 1-1

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = -x^3 + 3x$$

a) Regn ut integralet

$$\int_{-1}^0 f(x) dx$$

b) Bestem arealet av området som er avgrenset av grafen til f , x -aksen og linjene $x = -1$ og $x = 1$

Oppgave 1-2

Regn ut integralet.

$$\int \sin^3(x) \cdot \cos(x) dx$$

Oppgave 1-3

En elev har laget programmet under.

```

1  n = 0
2  S = 0
3
4  while S <= 200:
5      n = n + 1
6      S = S + 4*n - 2
7
8  print(n)

```

- Forklar hva eleven prøver å finne ut.
- Finn verdien eleven får skrevet ut når programmet kjøres.

Oppgave 1-4

Vi har gitt punktene $A(1, 1, 0)$, $B(4, 1, 1)$ og $C(2, 0, -1)$.

- Bestem arealet av trekanten $\triangle ABC$.
- Bestem avstanden fra punktet C til linja gjennom A og B .

A , B og C ligger i planet α . Punktet P har koordinatene $P(-2, 1, 4)$.

- Lag en parameterframstilling for linja ℓ som går gjennom punktet P og står vinkelrett på planet α .

En rett linje m går gjennom punktet P , er parallell med planet α og skjærer z -aksen i punktet D .

- Bestem koordinatene til D .

Oppgave 1-5

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right) - 1, \quad D_f = \langle 0, 20 \rangle.$$

- Løs likningen $f(x) = 0$.
- Finn amplituden, likevektslinja, perioden og forskyvningen langs likevektslinja.

Del 2

Oppgave 2-1

En fotballspiller skal ta et hjørnespark (corner) på en fotballbane. Posisjonen $\vec{r}$ til ballen etter t sekunder er gitt ved

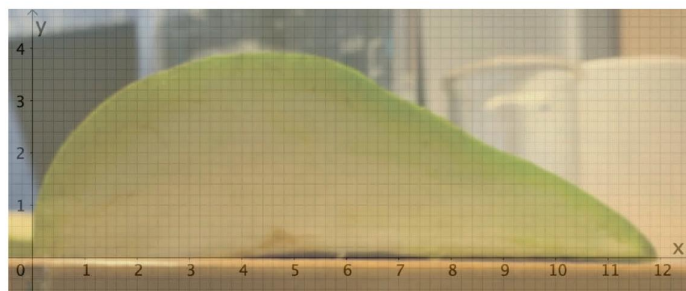
$$\vec{r}(t) = [30t, 5t, 7t - 4,9t^2].$$

Her er posisjonen gitt i meter, og koordinatsystemet er lagt slik at origo er i hjørnet av fotballbanen, x -aksen går langs kortsiden og y -aksen går langs langsiden.

- Hvor stor er farten til ballen idet den blir skutt?
- Hvor langt fra hjørnemarket er ballen når den treffer fotballbanen igjen?
- Hvor stor er farten til ballen når den er på sitt høyeste? Hvor høyt over fotballbanen er ballen da?

Oppgave 2-2

Bildet nedenfor viser halve snittflaten til en pære som er skåret over på midten. Bildet er satt inn i et koordinatsystem. Enheten langs begge aksene er centimeter.



Figur 1: Pæresnitt i koordinatsystem

Bruk informasjonen i bildet til å bestemme det omtrentlige volumet av pæra.

Oppgave 2-3

En sensor skal slå på utelyset foran ytterdøra til et hus. Lyset blir slått på $T(x)$ timer etter midnatt. $T(x)$ er gitt ved

$$T(x) = 4 \cdot \sin(0,0055\pi \cdot x - 0,5\pi) + 19.$$

x er antall dager etter 31. desember 2023 slik at $x = 1$ svarer til 1. januar 2024. Tidspunktet sensoren slår på utelyset, varierer fra kl. 15:00 til kl. 23:00, og det varierer periodisk i løpet av et år. Den 1. april slår lyset seg på kl. 19:00.

- Forklar hvordan de ulike verdiene i modellen $T(x)$ passer med opplysningene gitt ovenfor.
- Når i 2024 vil tidspunktet da lyset slår seg på, flytte seg 3 minutter per dag?
- Når endrer dette tidspunktet seg raskest, og hvor stor er endringen da?

Oppgave 2-4

De fem første kubikktallene er $1^3, 2^3, 3^3, 4^3$ og 5^3 , se figuren over. La S_n være summen av de n første kubikktallene.

- Beskriv den rekursive sammenhengen mellom S_n og S_{n+1} . Bestem en eksplisitt formel for S_n .
- Lag et program som regner ut S_{50} ved å bruke den rekursive sammenhengen du fant i oppgave a.
- Bruk induksjonsbevis til å bevise den eksplisitte formelen for S_n .

Oppgave 2-5

Punktene $A(1, 2, 1)$ og $B(3, 0, -3)$ ligger på en kuleflate. AB er en diameter til kuleflaten. Planet γ er gitt ved likningen $x + 2y + 2z = 14$.

- Finn den minste avstanden fra kuleflaten til planet γ .

Et plan α har samme avstand til kuleflaten og er parallelt med planet γ .

- Bestem en likning for planet α .

Oppgave 2-6

La $a_1 > 0$ og la $S(x)$ være summen av ei rekke gitt ved

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left(\int_0^x e^{-t} dt \right)^n$$

Bestem a_1 slik at den minste mulige summen blir 1.