

R2 eksamen V2025

14.05.25

Oversikt

Del 1 – 3 timer – uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1	Integraler S2 v25	integral	✓
1-2	Bestem f ut fra den deriverte	integral, tolk- ning av integra- ler, areal under graf	✓
1-3	Tallfølge med pro- gramme- ring og induksjon	programmering, rekker, bevis	✗
1-4	Trigono- metrisk funksjon og likning	trigonometri, funksjoner, lik- ninger	✗
1-5	Bordplate som tre- kant i 3D	vektorer, geometri, areal	✗
1-6	Caspers kode	programmering	✗
1-7	Vinkel i sirkel og trigono- metri	trigonometri, enhetssirkel	✓

Del 2 – 2 timer – med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-1	Bil på spiralvei i parkeringshus	vektorer, derivasjon, modellering	✗
2-2	Noras sparing og lån	lån, sparing, excel, cas	✓
2-3	Harens fart og gjennomsnittsfart	integral, derivasjon, modellering	✗
2-4	Vis at rekke blir $\ln 2$	bevis, utforskning, integral	✓

Del 1

Oppgave 1-1

Regn ut integralene

a) $\int_0^1 (2e^x + 2x^2) dx$

b) $\int \frac{2x-1}{x^2-x-6} dx$

✓ Løsningsforslag

a) $\int_0^1 (2e^x + 2x^2) dx = \left[2e^x + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \left(2e^1 + \frac{2}{3}1^3 \right) - \left(2e^0 + \frac{2}{3}0^3 \right) = 2e + \frac{2}{3} - 2 = \underline{\underline{2e - \frac{4}{3}}}$

b) Vi ser at den deriverte av uttrykket i nevneren er det samme som telleren, og det er derfor lurt å forsøke variabelskiftet $u = x^2 - x - 6$.

$$u = x^2 - x - 6 \implies \frac{du}{dx} = 2x - 1 \Leftrightarrow \frac{du}{2x-1} = dx$$

Vi substituerer inn i det opprinnelige uttrykket

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x-6} dx = \int \frac{\cancel{2x-1}}{u} \frac{du}{\cancel{2x-1}} = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \underline{\underline{\ln|x^2 - x - 6| + C}}$$

💡 Løsning med delbrøkoppspalting

Hvis du velger å løse ved hjelp av delbrøkoppspalting så vil du etter faktorisering få følgende likning

$$2x - 1 = A(x + 2) + B(x - 3)$$

Etter integrasjon får du svaret $\ln|x+2| + \ln|x-3| + C$, som er det samme svaret som vi får med variabelskiftet skrevet på en annen form.

Oppgave 1-2

Bestem et uttrykk for funksjonen f når du får vite at

- $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$
- Arealet av området som er avgrenset av grafen til f , x -aksen og linjene $x = 1$ og $x = 2$ er $\frac{11}{14}$. Dette arealet ligger over x -aksen.

✓ Løsningsforslag

Vi vet at $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ vil ha uendelig mange antideriverte med ulike konstantledd

$$\int -\frac{2}{x^3} dx = \int -2x^{-3} dx = \frac{-2}{-2}x^{-2} + C = \frac{1}{x^2} + C$$

Her er C et hvilket som helst tall. Siden vi har fått vite at arealet av området som avgrenses av grafen til f , $x = 1$, $x = 2$ og x -aksen er lik $\frac{11}{14}$, samt at hele arealet ligger over x -aksen, kan vi bruke et bestemt integral for å finne verdien av C .

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + C \right) dx &= \frac{11}{14} \\ \int_1^2 (x^{-2} + C) dx &= \frac{11}{14} \\ \left[-\frac{1}{x} + Cx \right]_1^2 &= \frac{11}{14} \\ \left(-\frac{1}{2} + C \cdot 2 \right) - \left(-\frac{1}{1} + C \cdot 1 \right) &= \frac{11}{14} \\ -\frac{1}{2} + 2C + \frac{1}{1} - C &= \frac{11}{14} \\ C &= \frac{11}{14} - \frac{1}{2} = \frac{2}{7}\end{aligned}$$

Vår antideriverte til $f'(x)$ har altså $C = \frac{2}{7}$, derfor har vi for alle $x \neq 0$:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{7}}}$$

Oppgave 1-3

En elev arbeider med en tallfølge og har skrevet denne koden:

```
1 a = 2
2 n = 5
3 for i in range(1, n + 1):
4     print(a)
5     a = a + (i + 2)
```

 Python

- a) Beskriv mønsteret i tallfølgen eleven arbeider med. Hva blir resultatet når koden kjøres?

Eleven har også skrevet denne koden:

```
1 a = 2
2 n = 5
3 S = 0
4 for i in range(1, n + 1):
5     S = S + a
6     a = a + (i + 2)
7 print(S)
```

Python

b) Hva ønsker eleven nå å finne ut? Hva blir resultatet når koden kjøres?

Tallene fra oppgave a) er starten på en rekke.

c) Bruk induksjon til å vise at et ledd i rekken kan uttrykkes som

$$a_n = \frac{n(n+3)}{2}, \quad n \geq 1$$

✓ Løsningsforslag

a) Her setter vi opp en oversikt for å se hvordan variablene i programmet utvikler seg.

i	a	Beregning av neste a
1	2	$2 + 1 + 2 = \underline{5}$
2	5	$5 + 2 + 2 = \underline{9}$
3	9	$9 + 3 + 2 = \underline{14}$
4	14	$14 + 4 + 2 = \underline{20}$
5	20	

Vi ser en tallfølge hvor differansene mellom leddene starter på 3, og deretter øker med 1 for hvert ledd. Matematisk kan dette uttrykkes med den rekursive sammenhengen

$$a_{n+1} = a_n + n + 2$$

Koden skriver ut leddene i tallfølgen 2, 5, 9, 14, 20.

b) Eleven har lagt til en variabel **S**. **S** gir en løpende sum av verdiene til **a**, derfor vil **S** være delsummen til rekka etter **n** ledd.

Eleven ønsker å finne delsummen til rekka etter 5 ledd, altså $2 + 5 + 9 + 14 + 20 = \underline{50}$

c) Påstanden vår er at

$$a_n = \frac{n(n+3)}{2}, \quad n \geq 1$$

Vi viser at dette gjelder for $n = 1$

$$a_1 = \frac{1(1+3)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \checkmark$$

Vi antar at formelen gjelder for $n = k$ slik at

$$a_k = \frac{k(k+3)}{2}$$

Vi finner a_{k+1} ved å bruke den rekursive sammenhengen fra b).

$$a_{k+1} = a_k + k + 2 = \frac{k(k+3)}{2} + \frac{2k}{2} + \frac{4}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2k + 4}{2} = \frac{k^2 + 5k + 4}{2}$$

Deretter finner vi a_{k+1} ved å bruke formelen.

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)((k+1)+3)}{2} = \frac{k^2 + 2k + 1 + 3k + 3}{2} = \frac{k^2 + 5k + 4}{2} \quad \checkmark$$

Oppgave 1-4

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 2\sqrt{3} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \quad , \quad D_f = \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

- Bestem amplituden, likevektslinja, perioden og faseforskyvningen.
- Løs likningen $f(x) = \sqrt{3}$

En funksjon g er gitt ved

$$g(x) = 3 \sin(2x) + \sqrt{3} \cos(2x) \quad , \quad D_g = \langle 0, 2\pi \rangle$$

- Løs likningen $g(x) = \sqrt{3}$

✓ Løsningsforslag

- Vi sammenligner med det generelle uttrykket for sinusfunksjoner

$$A \sin(kx + \phi) + d$$

Vi ser fra funksjonsuttrykket til g at

$$A = 2\sqrt{3}, \quad k = 2, \quad \phi = \frac{\pi}{6}, \quad d = 0$$

Når $k = 2$ så har sinusfunksjonen dobbelt så «tette» svingninger og perioden blir derfor $T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Da blir også faseforskyvningen $\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{12}$.

Amplituden er $2\sqrt{3}$, likevektslinja er $y = 0$, perioden er π og faseforskyvningen er $\frac{\pi}{12}$ mot venstre.

Oppgave 1-5

Et bord har en bordplate med en form som en trekant ABC . Dersom vi tenker oss bordet plassert i et tredimensjonalt koordinatsystem der enhetene langs aksene er desimeter, vil hjørnene ha koordinatene $A(0, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$ og $C(1, 4, 1)$.

- Er noen av vinklene i trekanten større enn 90° ? Husk å begrunne svaret.
- Bestem arealet av bordplaten.

En plante på veggen har en gren som vokser slik at den følger en rett linje gjennom punktene $D(3, 7, 3)$ og $E(2, 3, 2)$.

c) Vis at grenen aldri vil treffe bordplaten.

Oppgave 1-6

Casper har skrevet denne koden:

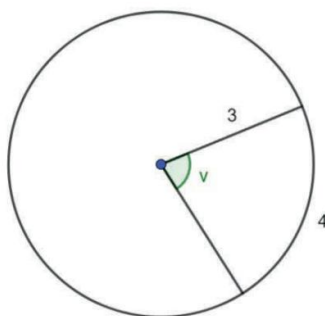
```
1 def f(x):
2     return x**3
3
4 def g(x):
5     return -2*x**2
6
7 dx = 0.0001
8
9 s = 0
10 x = 0
11 while x <= 2:
12     s = s + f(x)*dx + g(x)*dx
13     x = x + dx
14
15 print(s)
```

Bestem verdien som skrives ut når koden kjøres.

Oppgave 1-7

I en sirkel er radius lik 3.

Figuren nedenfor viser en vinkel v der toppunktet er plassert i sentrum av sirkelen og buelengden er 4.



Figur 1: Vinkel v i sirkel

a) Hvor stor er vinkelen v gitt i

- radianer?
- grader?

Om en annen vinkel u får du vite at $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ og $\tan u = 2$.

b) Bestem de eksakte verdiene til $\sin u$ og $\cos u$.

✓ Løsningsforslag

a) Radius $r = 3$ og buelengden $b = 4$.

$$v = \frac{b}{r} = \frac{4}{3}$$

Det går 360° på 2π radianer.

$$v_{\text{grader}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{360}{2\pi} = \frac{4}{2} \cdot \frac{360}{3\pi} = 2 \cdot \frac{120}{\pi} = \frac{240}{\pi} \approx 75^\circ$$

Vinkelen er $\frac{4}{3}$ radianer og omtrent 75° .

- b) Hvis $\tan u = 2$ så er $\frac{mk}{hk} = 2$. Hvis vi gir hosliggende katet lengden 1, så blir motstående katet 2. Da blir hypotenusen

$$h = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

Vi kan dermed sette opp eksakte verdier for $\sin u$ og $\cos u$.

$$\sin u = \frac{mk}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{og} \quad \cos u = \frac{hk}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Del 2

Oppgave 2-1

En bil kjører opp en spiralformet vei inne i et parkeringshus.

Posisjonen til bilen etter t sekunder er gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[4 \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right), 4 \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 2, 5 + \frac{1}{3}t \right], \quad t \in [0, 20]$$

der bakkenivået er xy -planet i et koordinatsystem med meter som enhet langs aksene.

- Hvor høyt over bakkenivået er bilen etter 5 sekunder?
- Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og farten til bilen etter 10 sekunder.
- Gjør nødvendige antakelser og bestem en mulig avstand mellom etasjene i parkeringshuset.

Oppgave 2-2

Nora blir 37 år i 2026 og vil begynne å spare til egen pensjon.

Hun vil sette et fast beløp inn på en konto i banken 1. januar hvert år. Hun vil begynne sparingen 1. januar 2026 og holde på til og med januar 2055.

Målet hennes er å ha 3 750 000 kroner i banken etter at rentene for 2055 er lagt til. Nora venter at den årlige rentesatsen på kontoen vil være 2,5 %.

- Hvor stort beløp må Nora sette i banken hvert år for å nå målet?

Nora har et huslån. Lånet har årlige terminer, og Nora betaler terminbeløpet i januar hvert år. I januar 2026 vil lånet være på 3 000 000 kroner.

Nora vil betale ned lånet før det året hun fyller 70. Hun har regnet seg fram til at hun da må betale 150 000 kroner hver termin fra og med januar 2026 til og med januar 2058.

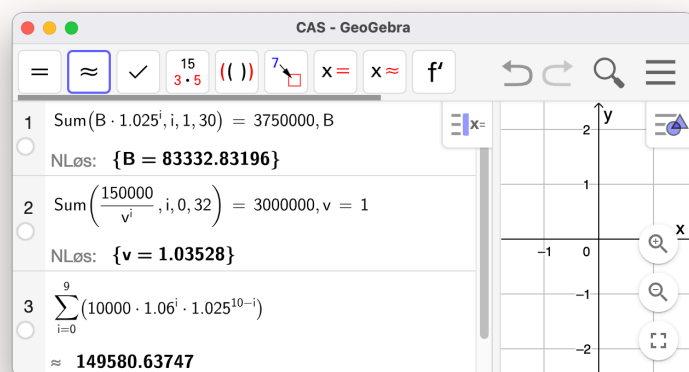
- Hvor høy har Nora regnet med at den årlige rentesatsen på lånet vil være?

Nora ønsker å hjelpe datteren med egenkapital til bolig. Nora oppretter derfor en ekstra sparekonto og setter opp en spareplan med ett årlig innskudd i 10 år. Det første innskuddet skal være 10000 kroner, deretter skal beløpene hun setter inn, øke med 6 % per år. Nora venter at rentesatsen vil være 2,5 % per år.

Målet er å ha 150 000 kroner på sparekontoen ett år etter at hun har satt inn det siste beløpet.

c) Vil Nora nå målet sitt?

✓ Løsningsforslag



Figur 2: CAS-løsning av 2-4

- a) Vi kaller det ukjente beløpet B . Nora skal sette inn B på konto 30 ganger. Det siste beløpet skal ha fått renter i 1 år, mens det første beløpet skal ha fått renter i 30 år.

For å ha 3 750 000 kr på konto etter 30 år så kan vi altså sette opp en likning med ei rekke. Likningen er løst i linje 1 i GeoGebra.

$$\underbrace{B \cdot 1,025^1}_{\text{År 2055}} + \underbrace{B \cdot 1,025^2}_{\text{År 2054}} + \dots + \underbrace{B \cdot 1,025^{30}}_{\text{År 2026}} = 3\,750\,000$$

Nora må sette inn 83 333 kr hvert år for å nå målet.

- b) Vi kaller den ukjente vekstfaktoren til renta v . Nora skal betale inn lånet over 33 terminer med første termin 1. januar 2026. Nåverdien (NV) til terminbeløpene vil være:

$$\underbrace{\frac{150\,000}{v^0}}_{\text{NV til 2026-beløpet}} + \underbrace{\frac{150\,000}{v^1}}_{\text{NV til 2027-beløpet}} + \dots + \underbrace{\frac{150\,000}{v^{32}}}_{\text{NV til 2058-beløpet}} = 3\,000\,000$$

Likningen er løst i linje 2 i GeoGebra.

Nora har regnet med at den årlige rentesatsen er 3,528 %.

- c) Sparebeløpene til Nora kan sees på som en rekke der det første beløpet er 10000 kr og får renter i 10 år, mens det siste beløpet er $10000 \cdot 1,06^9$ og får renter i ett år.

$$\underbrace{10000 \cdot 1,06^0 \cdot 1,025^{10}}_{\text{Beløp år 0}} + \underbrace{10000 \cdot 1,06^1 \cdot 1,025^9}_{\text{Beløp år 1}} + \dots + \underbrace{10000 \cdot 1,06^9 \cdot 1,025^1}_{\text{Beløp år 9}}$$

Beløpet er beregnet i linje 3 i GeoGebra.

Nora vil ikke nå målet på 150 000 kr. Hun vil ha 149 581 kr på kontoen etter 10 år.

i Alternativ løsning med målsøking i Excel

I regnearket nedenfor har jeg satt opp de tre deloppgavene i Excel for å løse med målsøking.

Oppgave a er løst ved å beregne innskuddet på kontoen i starten og slutten av hvert år. Noras sparebeløp er satt i celle C5. Ved å bruke målsøking og sette at celle C37 skal bli 3 750 000 kr ved å endre på C5 fikk jeg svaret 83 333 kr.

Oppgave b er løst ved å skrive inn restlånet 1. januar 2026, og beregne restlånene etter innbetaling hvert år. Restlånet etter innbetaling beregnes ved å sette avdraget lik $\frac{T}{v^{32-i}}$, der v er vekstfaktoren til renta og i er antall år siden 1. januar 2026. Renta ble funnet ved å gjøre målsøking der restlånet etter innbetaling skal være 0 kr i 2058.

Oppgave c. I denne oppgaven øker sparebeløpet med 6 % per år i kolonne O, samtidig som vi beregner renter i kolonner Q. I slutten av 2035 vil Nora ha 149 581 kr på konto.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Oppgave a				Oppgave b				Oppgave c							
2	Rente	2,50 %			Rente	3,53 %			Rente	2,50 %						
3	Sparebeløp	kr 83 332,83														
4																
5	År	Sparebeløp	Konto 1. jan	Konto 31. des	År	etter start	Terminbeløp	Restlån før innbet.	Restlån etter innbet.	År	År etter start	Sparebeløp	Konto 1. jan	Konto 31. des		
6	2026	kr 83 332,83	kr 83 332,83	kr 85 416,15	2026	0	kr 150 000,00	kr 3 000 000,00	kr 2 950 533,99	2026	0	kr 10 000,00	kr 10 000,00	kr 10 250,00		
7	2027	kr 83 332,83	kr 168 748,98	kr 172 967,71	2027	1	kr 150 000,00	kr 2 950 533,99	kr 2 899 323,07	2027	1	kr 10 600,00	kr 20 850,00	kr 21 371,25		
8	2028	kr 83 332,83	kr 256 300,54	kr 262 708,05	2028	2	kr 150 000,00	kr 2 899 323,07	kr 2 846 305,67	2028	2	kr 11 236,00	kr 32 607,25	kr 33 422,43		
9	2029	kr 83 332,83	kr 348 040,89	kr 354 691,91	2029	3	kr 150 000,00	kr 2 846 305,67	kr 2 791 418,08	2029	3	kr 11 910,16	kr 45 332,59	kr 46 465,91		
10	2030	kr 83 332,83	kr 438 024,74	kr 448 975,36	2030	4	kr 150 000,00	kr 2 791 418,08	kr 2 734 594,33	2030	4	kr 12 624,77	kr 59 090,68	kr 60 567,94		
11	2031	kr 83 332,83	kr 532 308,19	kr 545 615,90	2031	5	kr 150 000,00	kr 2 734 594,33	kr 2 675 766,11	2031	5	kr 13 382,26	kr 73 950,20	kr 75 798,95		
12	2032	kr 83 332,83	kr 628 948,73	kr 644 672,45	2032	6	kr 150 000,00	kr 2 675 766,11	kr 2 614 862,73	2032	6	kr 14 185,19	kr 89 984,14	kr 92 233,75		
13	2033	kr 83 332,83	kr 728 005,28	kr 746 205,41	2033	7	kr 150 000,00	kr 2 614 862,73	kr 2 551 810,97	2033	7	kr 15 036,30	kr 107 270,05	kr 109 951,80		
14	2034	kr 83 332,83	kr 829 538,24	kr 850 276,70	2034	8	kr 150 000,00	kr 2 551 810,97	kr 2 486 535,05	2034	8	kr 15 938,48	kr 125 890,28	kr 129 037,54		
15	2035	kr 83 332,83	kr 933 609,53	kr 956 949,77	2035	9	kr 150 000,00	kr 2 486 535,05	kr 2 418 956,53	2035	9	kr 16 894,79	kr 145 932,33	kr 149 580,64		
16	2036	kr 83 332,83	kr 1 040 282,60	kr 1 066 289,67	2036	10	kr 150 000,00	kr 2 418 956,53	kr 2 348 994,16							
17	2037	kr 83 332,83	kr 1 149 622,50	kr 1 178 363,06	2037	11	kr 150 000,00	kr 2 348 994,16	kr 2 276 563,87							
18	2038	kr 83 332,83	kr 1 261 695,89	kr 1 293 238,29	2038	12	kr 150 000,00	kr 2 276 563,87	kr 2 201 578,59							
19	2039	kr 83 332,83	kr 1 376 571,12	kr 1 410 985,40	2039	13	kr 150 000,00	kr 2 201 578,59	kr 2 123 948,20							
20	2040	kr 83 332,83	kr 1 494 318,23	kr 1 531 676,19	2040	14	kr 150 000,00	kr 2 123 948,20	kr 2 043 579,39							
21	2041	kr 83 332,83	kr 1 615 009,02	kr 1 655 384,24	2041	15	kr 150 000,00	kr 2 043 579,39	kr 1 960 375,56							
22	2042	kr 83 332,83	kr 1 738 717,08	kr 1 782 185,00	2042	16	kr 150 000,00	kr 1 960 375,56	kr 1 874 236,71							
23	2043	kr 83 332,83	kr 1 865 517,84	kr 1 912 155,78	2043	17	kr 150 000,00	kr 1 874 236,71	kr 1 785 059,31							
24	2044	kr 83 332,83	kr 1 995 488,61	kr 2 045 375,83	2044	18	kr 150 000,00	kr 1 785 059,31	kr 1 692 736,16							
25	2045	kr 83 332,83	kr 2 128 708,66	kr 2 181 926,38	2045	19	kr 150 000,00	kr 1 692 736,16	kr 1 597 156,31							
26	2046	kr 83 332,83	kr 2 265 259,21	kr 2 321 890,69	2046	20	kr 150 000,00	kr 1 597 156,31	kr 1 498 204,87							
27	2047	kr 83 332,83	kr 2 405 223,52	kr 2 465 354,11	2047	21	kr 150 000,00	kr 1 498 204,87	kr 1 395 762,91							
28	2048	kr 83 332,83	kr 2 548 686,94	kr 2 612 404,11	2048	22	kr 150 000,00	kr 1 395 762,91	kr 1 289 707,31							
29	2049	kr 83 332,83	kr 2 695 736,95	kr 2 763 130,37	2049	23	kr 150 000,00	kr 1 289 707,31	kr 1 179 910,58							
30	2050	kr 83 332,83	kr 2 846 463,20	kr 2 917 624,78	2050	24	kr 150 000,00	kr 1 179 910,58	kr 1 066 240,76							
31	2051	kr 83 332,83	kr 3 000 957,61	kr 3 075 981,55	2051	25	kr 150 000,00	kr 1 066 240,76	kr 948 561,23							
32	2052	kr 83 332,83	kr 3 159 314,39	kr 3 238 297,25	2052	26	kr 150 000,00	kr 948 561,23	kr 826 730,55							
33	2053	kr 83 332,83	kr 3 321 630,08	kr 3 404 670,83	2053	27	kr 150 000,00	kr 826 730,55	kr 700 602,28							
34	2054	kr 83 332,83	kr 3 488 003,66	kr 3 575 203,75	2054	28	kr 150 000,00	kr 700 602,28	kr 570 024,82							
35	2055	kr 83 332,83	kr 3 658 536,59	kr 3 750 000,00	2055	29	kr 150 000,00	kr 570 024,82	kr 434 841,23							
36					2056	30	kr 150 000,00	kr 434 841,23	kr 294 889,03							
37					2057	31	kr 150 000,00	kr 294 889,03	kr 150 000,00							
38					2058	32	kr 150 000,00	kr 150 000,00	(0,00)							
39																
40																
41																

Figur 3: Regneark for løsning av Noras sparing og lån

Oppgave a				Oppgave b				Oppgave c					
Rente	2,50 %			Rente	3,53 %			Rente	2,50 %				
Sparebeløp	kr 85 416,15												
År	Sparebeløp	Konto 1. jan	Konto 31. des	År	År etter start	Terminbeløp	Restlån før innbet.	Restlån etter innbet.	År	År etter start	Sparebeløp	Konto 1. jan	Konto 31. des
2026	=C\$5	=C8	=D8*(1+\$C\$4)	2026	0	kr 150 000,00	kr 3 000 000,00	=J8-I8/(1+\$I\$4)^(32-H8)	2026	0	kr 10 000,00	=Q8	=P8*(1+\$N\$4)
2027	=C\$5	=E8+C9	=D9*(1+\$C\$4)	2027	1	=H8	=H8	=J9-I9/(1+\$I\$4)^(32-H9)	2027	1	=O8*1,06	=Q8+O9	=P9*(1+\$N\$4)
2028	=C\$5	=E9+C10	=D10*(1+\$C\$4)	2028	2	=H9	=H9	=J10-I10/(1+\$I\$4)^(32-H10)	2028	2	=O9*1,06	=Q9+O10	=P10*(1+\$N\$4)
2029	=C\$5	=E10+C11	=D11*(1+\$C\$4)	2029	3	=H10	=H10	=J11-I11/(1+\$I\$4)^(32-H11)	2029	3	=O10*1,06	=Q10+O11	=P11*(1+\$N\$4)
2030	=C\$5	=E11+C12	=D12*(1+\$C\$4)	2030	4	=H11	=H11	=J12-I12/(1+\$I\$4)^(32-H12)	2030	4	=O11*1,06	=Q11+O12	=P12*(1+\$N\$4)
2031	=C\$5	=E12+C13	=D13*(1+\$C\$4)	2031	5	=H12	=H12	=J13-I13/(1+\$I\$4)^(32-H13)	2031	5	=O12*1,06	=Q12+O13	=P13*(1+\$N\$4)
2032	=C\$5	=E13+C14	=D14*(1+\$C\$4)	2032	6	=H13	=H13	=J14-I14/(1+\$I\$4)^(32-H14)	2032	6	=O13*1,06	=Q13+O14	=P14*(1+\$N\$4)
2033	=C\$5	=E14+C15	=D15*(1+\$C\$4)	2033	7	=H14	=H14	=J15-I15/(1+\$I\$4)^(32-H15)	2033	7	=O14*1,06	=Q14+O15	=P15*(1+\$N\$4)
2034	=C\$5	=E15+C16	=D16*(1+\$C\$4)	2034	8	=H15	=H15	=J16-I16/(1+\$I\$4)^(32-H16)	2034	8	=O15*1,06	=Q15+O16	=P16*(1+\$N\$4)
2035	=C\$5	=E16+C17	=D17*(1+\$C\$4)	2035	9	=H16	=H16	=J17-I17/(1+\$I\$4)^(32-H17)	2035	9	=O16*1,06	=Q16+O17	=P17*(1+\$N\$4)
2036	=C\$5	=E17+C18	=D18*(1+\$C\$4)	2036	10	=H17	=H17	=J18-I18/(1+\$I\$4)^(32-H18)					
2037	=C\$5	=E18+C19	=D19*(1+\$C\$4)	2037	11	=H18	=H18	=J19-I19/(1+\$I\$4)^(32-H19)					
2038	=C\$5	=E19+C20	=D20*(1+\$C\$4)	2038	12	=H19	=H19	=J20-I20/(1+\$I\$4)^(32-H20)					
2039	=C\$5	=E20+C21	=D21*(1+\$C\$4)	2039	13	=H20	=H20	=J21-I21/(1+\$I\$4)^(32-H21)					
2040	=C\$5	=E21+C22	=D22*(1+\$C\$4)	2040	14	=H21	=H21	=J22-I22/(1+\$I\$4)^(32-H22)					
2041	=C\$5	=E22+C23	=D23*(1+\$C\$4)	2041	15	=H22	=H22	=J23-I23/(1+\$I\$4)^(32-H23)					
2042	=C\$5	=E23+C24	=D24*(1+\$C\$4)	2042	16	=H23	=H23	=J24-I24/(1+\$I\$4)^(32-H24)					
2043	=C\$5	=E24+C25	=D25*(1+\$C\$4)	2043	17	=H24	=H24	=J25-I25/(1+\$I\$4)^(32-H25)					
2044	=C\$5	=E25+C26	=D26*(1+\$C\$4)	2044	18	=H25	=H25	=J26-I26/(1+\$I\$4)^(32-H26)					
2045	=C\$5	=E26+C27	=D27*(1+\$C\$4)	2045	19	=H26	=H26	=J27-I27/(1+\$I\$4)^(32-H27)					
2046	=C\$5	=E27+C28	=D28*(1+\$C\$4)	2046	20	=H27	=H27	=J28-I28/(1+\$I\$4)^(32-H28)					
2047	=C\$5	=E28+C29	=D29*(1+\$C\$4)	2047	21	=H28	=H28	=J29-I29/(1+\$I\$4)^(32-H29)					
2048	=C\$5	=E29+C30	=D30*(1+\$C\$4)	2048	22	=H29	=H29	=J30-I30/(1+\$I\$4)^(32-H30)					
2049	=C\$5	=E30+C31	=D31*(1+\$C\$4)	2049	23	=H30	=H30	=J31-I31/(1+\$I\$4)^(32-H31)					
2050	=C\$5	=E31+C32	=D32*(1+\$C\$4)	2050	24	=H31	=H31	=J32-I32/(1+\$I\$4)^(32-H32)					
2051	=C\$5	=E32+C33	=D33*(1+\$C\$4)	2051	25	=H32	=H32	=J33-I33/(1+\$I\$4)^(32-H33)					
2052	=C\$5	=E33+C34	=D34*(1+\$C\$4)	2052	26	=H33	=H33	=J34-I34/(1+\$I\$4)^(32-H34)					
2053	=C\$5	=E34+C35	=D35*(1+\$C\$4)	2053	27	=H34	=H34	=J35-I35/(1+\$I\$4)^(32-H35)					
2054	=C\$5	=E35+C36	=D36*(1+\$C\$4)	2054	28	=H35	=H35	=J36-I36/(1+\$I\$4)^(32-H36)					
2055	=C\$5	=E36+C37	=D37*(1+\$C\$4)	2055	29	=H36	=H36	=J37-I37/(1+\$I\$4)^(32-H37)					
				2056	30	=H37	=H37	=J38-I38/(1+\$I\$4)^(32-H38)					
				2057	31	=H38	=H38	=J39-I39/(1+\$I\$4)^(32-H39)					
				2058	32	=H39	=H39	=J40-I40/(1+\$I\$4)^(32-H40)					

Figur 4: Formler for regneark med målsøking

Oppgave 2-3

En hare løper vekk fra en rev som angriper den. Farten v til haren er gitt ved

$$v(t) = 8,3 - 17,4 \cdot e^{-5t} + 9,1 \cdot e^{-0,08t}$$

Her er v meter per sekund, og t er antall sekunder etter at haren starter å løpe.

- Hvor lang tid vil det gå før akselerasjonen til haren er null? Hva forteller dette svaret?
- Hvor langt løper haren i løpet av de første 7 sekundene?

Gjennomsnittsfarten v_g til haren de første x sekundene er gitt ved

$$v_g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x v(t) dt$$

- Bestem gjennomsnittsfarten til haren de første 200 meterne.

Oppgave 2-4

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Det kan vises at

$$\int 1 dx + \int x dx + \int x^2 dx + \int x^3 dx + \dots = \int \frac{1}{1-x} dx$$

Bruk denne sammenhengen til å vise at

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2$$

I denne oppgaven kan du se bort fra integrasjonskonstantene.

✓ Løsningsforslag

Vi har fått oppgitt at

$$\int 1 \, dx + \int x \, dx + \int x^2 \, dx + \int x^3 \, dx + \dots = \int \frac{1}{1-x} \, dx \quad (1)$$

Vi gjennomfører resonnementet vårt i flere steg.

Integrasjon av høyre side

Vi ser først på høyre side av likning (1). Vi ser at vi kan integrere denne siden ved å gjøre variabelskiftet $u = 1 - x \implies \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -1 \cdot du$.

Integralet blir (sett bort fra integrasjonskonstantene)

$$\int \frac{1}{1-x} \, dx = \int \frac{1}{u} \cdot (-1) \, du = - \int \frac{1}{u} \, du = -\ln|1-x|$$

Integrasjon av venstre side

Vi gjennomfører så integrasjonene på venstre side av likning (1) og får

$$\int 1 \, dx + \int x \, dx + \int x^2 \, dx + \int x^3 \, dx + \dots = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

Ved å integrere begge sidene av likning (1) har vi altså foreløpig vist at:

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots = -\ln|1-x|$$

Vise at rekka er lik $\ln 2$

Vi skal vise at

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2 \quad (2)$$

Vi sammenligner venstre side i likning (2) med svaret vi fikk da vi integrerte venstre side i likning (1).

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots \quad (3)$$

Ved sammenligning av leddene ser vi at $x = \frac{1}{2}$ er en løsning av likning (3).

Siden $x = \frac{1}{2}$, så sjekker vi hva $-\ln|1-x|$ gir oss når $x = \frac{1}{2}$

$$-\ln|1-x| = -\ln\left|1-\frac{1}{2}\right| = -\ln\left|\frac{1}{2}\right| = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -(\ln 1 - \ln 2) = \ln 2$$

$\underbrace{\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}}_{\text{Regel: } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$

Vi har altså vist at

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots = -\ln|1-x|$$

Og for $x = \frac{1}{2}$ gjelder derfor:

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2 \quad \blacksquare$$