

R2 eksamen V2025

14.05.25

Oversikt

Del 1 – 3 timer – uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1	Integraler S2 v25	integral	✓
1-2	Bestem f ut fra den deriverte	integral, tolk- ning av integra- ler, areal under graf	✓
1-3	Tallfølge med pro- gramme- ring og induksjon	programmering, rekker, bevis	✗
1-4	Trigono- metrisk funksjon og likning	trigonometri, funksjoner, lik- ninger	✗
1-5	Bordplate som tre- kant i 3D	vektorer, geometri, areal	✗
1-6	Caspers kode	programmering	✗
1-7	Vinkel i sirkel og trigono- metri	trigonometri, enhetssirkel	✓

Del 2 – 2 timer – med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-1	Bil på spiralvei i parkeringshus	vektorer, derivasjon, modellering	✗
2-2	Noras sparing og lån	lån, sparing, excel, cas	✓
2-3	Harens fart og gjennomsnittsfart	integral, derivasjon, modellering	✗
2-4	Vis at rekke blir $\ln 2$	bevis, utforskning, integral	✓

Del 1

Oppgave 1-1

Regn ut integralene

a) $\int_0^1 (2e^x + 2x^2) dx$

b) $\int \frac{2x-1}{x^2-x-6} dx$

Oppgave 1-2

Bestem et uttrykk for funksjonen f når du får vite at

- $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$
- Arealet av området som er avgrenset av grafen til f , x -aksen og linjene $x = 1$ og $x = 2$ er $\frac{11}{14}$. Dette arealet ligger over x -aksen.

Oppgave 1-3

En elev arbeider med en tallfølge og har skrevet denne koden:

```
1 a = 2
2 n = 5
3 for i in range(1, n + 1):
4     print(a)
5     a = a + (i + 2)
```

 Python

- a) Beskriv mønsteret i tallfølgen eleven arbeider med. Hva blir resultatet når koden kjøres?

Eleven har også skrevet denne koden:

```
1 a = 2
2 n = 5
3 S = 0
```

 Python

```

4  for i in range(1, n + 1):
5      S = S + a
6      a = a + (i + 2)
7  print(S)

```

b) Hva ønsker eleven nå å finne ut? Hva blir resultatet når koden kjøres?

Tallene fra oppgave a) er starten på en rekke.

c) Bruk induksjon til å vise at et ledd i rekken kan uttrykkes som

$$a_n = \frac{n(n+3)}{2}, \quad n \geq 1$$

Oppgave 1-4

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 2\sqrt{3} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \quad D_f = \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

a) Bestem amplituden, likevektslinja, perioden og faseforskyvningen.

b) Løs likningen $f(x) = \sqrt{3}$

En funksjon g er gitt ved

$$g(x) = 3 \sin(2x) + \sqrt{3} \cos(2x), \quad D_g = \langle 0, 2\pi \rangle$$

c) Løs likningen $g(x) = \sqrt{3}$

Oppgave 1-5

Et bord har en bordplate med en form som en trekant ABC . Dersom vi tenker oss bordet plassert i et tredimensjonalt koordinatsystem der enhetene langs aksene er desimeter, vil hjørnene ha koordinatene $A(0, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$ og $C(1, 4, 1)$.

a) Er noen av vinklene i trekanten større enn 90° ? Husk å begrunne svaret.

b) Bestem arealet av bordplaten.

En plante på veggen har en gren som vokser slik at den følger en rett linje gjennom punktene $D(3, 7, 3)$ og $E(2, 3, 2)$.

c) Vis at grenen aldri vil treffe bordplaten.

Oppgave 1-6

Casper har skrevet denne koden:

```

1  def f(x):
2      return x**3
3
4  def g(x):
5      return -2*x**2
6
7  dx = 0.0001
8
9  s = 0

```

 Python

```

10 x = 0
11 while x <= 2:
12     s = s + f(x)*dx + g(x)*dx
13     x = x + dx
14
15 print(s)

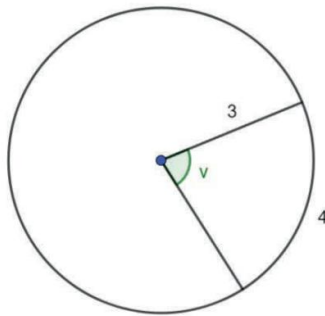
```

Bestem verdien som skrives ut når koden kjøres.

Oppgave 1-7

I en sirkel er radius lik 3.

Figuren nedenfor viser en vinkel v der toppunktet er plassert i sentrum av sirkelen og buelengden er 4.



Figur 1: Vinkel v i sirkel

a) Hvor stor er vinkelen v gitt i

- radianer?
- grader?

Om en annen vinkel u får du vite at $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ og $\tan u = 2$.

b) Bestem de eksakte verdiene til $\sin u$ og $\cos u$.

Del 2

Oppgave 2-1

En bil kjører opp en spiralformet vei inne i et parkeringshus.

Posisjonen til bilen etter t sekunder er gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[4 \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right), 4 \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 2, 5 + \frac{1}{3}t \right], \quad t \in [0, 20]$$

der bakkenivået er xy -planet i et koordinatsystem med meter som enhet langs aksene.

- Hvor høyt over bakkenivået er bilen etter 5 sekunder?
- Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og farten til bilen etter 10 sekunder.
- Gjør nødvendige antakelser og bestem en mulig avstand mellom etasjene i parkeringshuset.

Oppgave 2-2

Nora blir 37 år i 2026 og vil begynne å spare til egen pensjon.

Hun vil sette et fast beløp inn på en konto i banken 1. januar hvert år. Hun vil begynne sparingen 1. januar 2026 og holde på til og med januar 2055.

Målet hennes er å ha 3 750 000 kroner i banken etter at rentene for 2055 er lagt til. Nora venter at den årlige rentesatsen på kontoen vil være 2,5 %.

- a) Hvor stort beløp må Nora sette i banken hvert år for å nå målet?

Nora har et huslån. Lånet har årlige terminer, og Nora betaler terminbeløpet i januar hvert år. I januar 2026 vil lånet være på 3 000 000 kroner.

Nora vil betale ned lånet før det året hun fyller 70. Hun har regnet seg fram til at hun da må betale 150 000 kroner hver termin fra og med januar 2026 til og med januar 2058.

- b) Hvor høy har Nora regnet med at den årlige rentesatsen på lånet vil være?

Nora ønsker å hjelpe datteren med egenkapital til bolig. Nora oppretter derfor en ekstra sparekonto og setter opp en spareplan med ett årlig innskudd i 10 år. Det første innskuddet skal være 10000 kroner, deretter skal beløpene hun setter inn, øke med 6 % per år. Nora venter at rentesatsen vil være 2,5 % per år.

Målet er å ha 150 000 kroner på sparekontoen ett år etter at hun har satt inn det siste beløpet.

- c) Vil Nora nå målet sitt?

Oppgave 2-3

En hare løper vekk fra en rev som angriper den. Farten v til haren er gitt ved

$$v(t) = 8,3 - 17,4 \cdot e^{-5t} + 9,1 \cdot e^{-0,08t}$$

Her er v meter per sekund, og t er antall sekunder etter at haren starter å løpe.

- a) Hvor lang tid vil det gå før akselerasjonen til haren er null? Hva forteller dette svaret?
b) Hvor langt løper haren i løpet av de første 7 sekundene?

Gjennomsnittsfarten v_g til haren de første x sekundene er gitt ved

$$v_g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x v(t) dt$$

- c) Bestem gjennomsnittsfarten til haren de første 200 meterne.

Oppgave 2-4

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Det kan vises at

$$\int 1 dx + \int x dx + \int x^2 dx + \int x^3 dx + \dots = \int \frac{1}{1-x} dx$$

Bruk denne sammenhengen til å vise at

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2$$

I denne oppgaven kan du se bort fra integrasjonskonstantene.