

S1 eksamen H2023

14.11.23

Oversikt

Del 1 – 1 time – uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1	Forenk- le alge- braisk ut- trykk	algebra, potens- regning	✓
1-2	Logarit- mer i sti- gende rekkeføl- ge	logaritmer	✗
1-3	Sann- synlighet med tre terninger	sannsynlighet, kombinatorikk	✗
1-4	Konti- nuerlig stykkevis funksjon	kontinuitet, funksjoner	✗
1-5	Grense- kostnad og pro- gramme- ring	programmering, grenseinntekt og grensekost- nad, økonomi	✗

Del 2 – 4 timer – med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-1	Sofaproduksjon og overskudd	økonomi, andregradslikninger, modellering	✗
2-2	Venstre-hendte elever	sannsynlighet, diskrete sannsynlighetsfordelinger	✗
2-3	Renter og dobbelttid	geometrisk vekst, logaritmer, sparing	✗
2-4	Sannsynlighet med fem terninger	sannsynlighet, programmering, kombinatorikk	✗
2-5	Kasse uten lokk	optimering, derivasjon, geometri	✗
2-6	Påstander om tredje-gradsfunksjon	funksjonsdrøfting, derivasjon, argumentasjon	✓

Del 1

Oppgave 1-1

Skriv så enkelt som mulig.

$$\left(\frac{3a^2}{2b^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^2b^{-5}}{4}\right)^{-1}$$

✓ Løsningsforslag

$$\left(\frac{3a^2}{2b^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^2b^{-5}}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{3^2a^4}{2^2b^6}\right) \cdot \left(\frac{a^{-2}b^5}{4^{-1}}\right) = 3^2 \cdot 2^{-2} \cdot 4^1 \cdot a^{4-2} \cdot b^{5-6} = 9 \cdot a^2b^{-1} = \underline{\underline{\frac{9a^2}{b}}}$$

Oppgave 1-2

Skriv uttrykkene nedenfor i stigende rekkefølge.

$$2 \ln e^3 \quad 3 \lg 70 \quad e^{3 \ln 2}$$

Husk å begrunne svaret.

Oppgave 1-3

Du kaster tre terninger.

- Bestem sannsynligheten for at alle terningene viser forskjellig antall øyne.
- Bestem sannsynligheten for at nøyaktig to av terningene viser samme antall øyne.

Oppgave 1-4

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - a^2, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Bestem a slik at funksjonen blir kontinuert.

Oppgave 1-5

En bedrift produserer en vare. De daglige kostnadene K (i kroner) ved produksjon av x enheter av varen er gitt ved

$$K(x) = 0,1x^2 + 100x + 9000$$

Den økonomiansvarlige i bedriften har laget programmet nedenfor.

```
1 def K(x):  
2     return 0.1*x**2 + 100*x + 9000  
3  
4 grense = 200  
5 h = 0.00001  
6 a = 1  
7  
8 while (K(a + h) - K(a))/h < grense:  
9     a = a + 1  
10  
11 print(a)
```

Hva blir resultatet når programmet kjøres? Gi en praktisk tolkning av svaret.

Del 2

Oppgave 2-1

En møbelfabrikk produserer en type sofaer. Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom antall sofaer de produserer per måned, og produksjonskostnadene per måned.

Antall sofaer	10	25	40	70	100	140	180
Produksjonskostnader (i tusen kroner)	270	550	870	1500	2200	3300	4500

Fabrikken selger alle sofaene til en møbelkjede. De får 28 000 kroner per sofa.

- Bruk opplysningene ovenfor til å vise at funksjonen O gitt ved

$$O(x) = -0,041x^2 + 11x - 103$$

er en god modell for det månedlige overskuddet (i tusen kroner) til fabrikken, dersom de produserer x sofaer. b) Hvilken produksjonsmengde gir størst overskudd?

Fabrikken ønsker at overskuddet skal være 1 million kroner per måned. De vil derfor endre salgsprisen på sofaene.

- c) Bestem den laveste salgsprisen de kan sette per sofa, dersom de skal få dette overskuddet.

Oppgave 2-2

Undersøkelser viser at 10 prosent av alle menn og 8 prosent av alle kvinner er venstrehendte.

På en skole er det 280 gutter og 220 jenter.

- a) Bestem sannsynligheten for at minst 25 av guttene på skolen er venstrehendte.
b) Hvor mange gutter må det være i en klasse dersom sannsynligheten for at minst tre av guttene er venstrehendte, skal være større enn 20 prosent?

I en klasse er det 13 gutter og 17 jenter.

- c) Bestem sannsynligheten for at nøyaktig tre av elevene i klassen er venstrehendte.

Oppgave 2-3

Per og Kåre setter inn like store beløp på hver sin konto. Per får en årlig rente på 3,00 prosent, mens Kåre får en årlig rente på 6,00 prosent.

- a) Hvilket beløp må Per sette inn dersom han skal ha 30 000 kroner på kontoen etter 8 år?

Påstand

Det vil gå nøyaktig dobbelt så lang tid før beløpet Per har på konto, har doblet seg, som det vil gå før beløpet Kåre har på konto, har doblet seg.

- b) Argumenter for at påstanden *ikke* er riktig.
c) Hvor lang tid vil det gå før Per og Kåre til sammen har dobbelt så mye penger som de satte inn på kontoene, dersom den årlige renten er henholdsvis 3,00 prosent og 6,00 prosent?

Oppgave 2-4

Du kaster fem terninger.

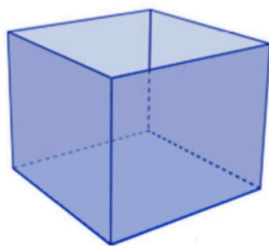
- a) Bestem sannsynligheten for at minst to av terningene viser samme antall øyne.

La X være summen av antall øyne på de fem terningene.

- b) Bruk programmering til å bestemme $P(X > 20)$.
c) Bestem den største verdien av k som er slik at $P(X \geq k) > 0,8$.

Oppgave 2-5

Du skal lage en kasse uten lokk. Den skal ha form som et rett prisme. Grunnflaten i kassen skal være kvadratisk. For at vekten ikke skal bli for stor, kan ikke det samlede arealet av platene som brukes til å lage kassen, være mer enn 120 dm^2 .



Figur 1: Kasse uten lokk

- Hva er det største volumet kassen kan få dersom sidene i bunnen skal være 5 dm?
- Hva er det maksimale volumet kassen kan få?

Du skal lage en slik kasse som rommer 80 dm^3 .

- Hva er det minste samlede arealet platene kan ha, dersom du skal lage en slik kasse?

Oppgave 2-6

La f være en tredjegradsfunksjon.

Avgjør for hver av påstandene nedenfor om den er sann eller usann. Begrunn svaret.

- Påstand 1: Grafen til f har minst ett ekstremalpunkt.
- Påstand 2: Alle linjer på formen $y = ax + b$, der $a, b \in \mathbb{R}$, vil skjære grafen til f .
- Påstand 3: Dersom grafen til f har et vendepunkt for $x = 3$, er $f'(1) = f'(5)$.

✓ Løsningsforslag

- Jeg vet at funksjonen $f(x) = x^3$ kun har et terrassepunkt og ingen ekstremalpunkter. Jeg bruker derfor denne funksjonen som et moteksempel til påstanden og konkluderer med at påstanden er feil.

Påstanden er usann. f trenger ikke ha ekstremalpunkter.

- f har et x^3 -ledd som vil stige eller synke kubisk mye raskere enn $y = ax + b$. Det blir dermed umulig for den rette linja å «ikke bli tatt igjen» av f .

Vi kan også bevise at disse vil skjære hverandre matematisk hvis vi lar $f(x) = cx^3 + dx^2 + mx + n$.

$$cx^3 + dx^2 + mx + n = ax + b$$

$$cx^3 + dx^2 + (m + a)x + (n + b) = 0$$

Den siste likningen er en vanlig tredjegradslikning. Disse har alltid en løsning (tredjegradsfunksjoner må alltid krysse x -aksen minst en gang). Derfor må $y = ax + b$ skjære f minst ett sted.

Påstanden er sann. $y = ax + b$ vil alltid skjære f minst ett sted.

- Vi har vendepunkter når $f''(x) = 0$. Vi prøver å dobbeltderivere f og sette inn for $f''(3) = 0$.

$$f(x) = cx^3 + dx^2 + mx + n$$

$$f'(x) = 3cx^2 + 2dx + m$$

$$f''(x) = 6cx + 2d$$

$$f''(3) = 0$$

$$6c \cdot 3 + 2d = 0$$

$$18c + 2d = 0$$

$$d = -9c$$

Vi sjekker hva $f'(1)$ og $f'(5)$ er og prøver innsetningsmetoden med $d = -9c$.

$$f'(1) = 3c \cdot 1^2 + 2d \cdot 1 + m$$

$$f'(1) = 3c + 2(-9c) + m$$

$$f'(1) = 3c - 18c + m$$

$$f'(1) = -15c + m$$

$$f'(5) = 3c \cdot 5^2 + 2d \cdot 5 + m$$

$$f'(5) = 3c \cdot 25 + 2(-9c) \cdot 5 + m$$

$$f'(5) = 75c + 10 \cdot (-9c) + m$$

$$f'(5) = 75c - 90c + m$$

$$f'(5) = -15c + m$$

Påstanden stemmer. Når f har vendepunkt i $x = 3$ så er $f'(1) = f'(5)$.