

S1 eksamen V2023

Oversikt

Del 1 – 1 time – uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1	Algebra potens- regning	potenser, alge- bra	✗
1-2	Deri- ver lo- garitme- funksjon	derivasjon, loga- ritmer	✗
1-3	Grense- verdi når x går mot 2	grenseverdi, de- rivasjon, funk- sjoner, asympto- ter	✗
1-4	Kuler i krukke hyperge- ometrisk	sannsynlighet, hypergeomet- risk	✗
1-5	Ukjent program med kost- nader for produk- sjon	programmering, økonomi, vekst- fart	✗

Del 2 – 4 timer – med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-1	Timelønn og lønnsvekst	prosent, eksponentialfunksjoner, regresjon, økonomi	✗
2-2a	Logaritme på stand	logaritmer	✗
2-2b	Har alle fjerdegradsfunksjoner ekstremalpunkt	funksjoner, funksjonsdrøfting	✗
2-2c	Sannsynligheter ved lotto-spill	sannsynlighet, hypergeometrisk	✗
2-5	Billetter til fotballkamp	sannsynlighet, binomisk, utforskning, programmering, excel	✗
2-6	Lydstyrke fra fly	formler, cas, logaritmer	✗

Del 1

Oppgave 1-1

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{(2ab^{-1})^3 \cdot (a^2b^{-2})^{-1}}{4a^2b^{-3}}$$

✓ Løsningsforslag

$$\frac{(2ab^{-1})^3 \cdot (a^2b^{-2})^{-1}}{4a^2b^{-3}} = \frac{2^3 a^3 b^{-1 \cdot 3} a^{2 \cdot -1} b^{(-2) \cdot -1} a^{-2} b^3}{4} = \frac{8}{4} \cdot a^{(3-2-2)} \cdot b^{(-3+2+3)} = \frac{2b^2}{a}$$

Oppgave 1-2

Deriver funksjonen f gitt ved

$$f(x) = x \cdot \ln x$$

✓ Løsningsforslag

Bruker produktregelen med $u = x$, $v = \ln x$.

$$f'(x) = (u' \cdot v + u \cdot v') = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\ln x + 1}}$$

Oppgave 1-3

Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

✓ Løsningsforslag

Ser at både teller og nevner går mot null når $x \rightarrow 2$. Vi kan derfor bruke L'Hopitals regel.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = \underline{\underline{3}}$$

Oppgave 1-4

I en krukke ligger det fire hvite og tre svarte kuler. Du trekker tilfeldig tre kuler uten tilbakelegging.

- Hva er sannsynligheten for at to av de tre kulene er svarte?
- Hva er sannsynligheten for at du trekker minst to hvite kuler?

✓ Løsningsforslag

- Dette er et hypergeometrisk forsøk siden vi har to typer objekter og skal trekke $k_1 = 2$ av den ene typen og $k_2 = 1$ av den andre typen

$$\frac{\binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{3}{2} \binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{\frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 4}{\frac{7!}{3! \cdot 4!}} = \frac{3 \cdot 4}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2}} = \frac{12 \cdot 3 \cdot 2}{210} = \frac{72}{210} = \frac{12}{35}$$

- La X være antall hvite kuler. Da er

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 0))$$

Vi har allerede bestemt sannsynligheten for $P(X = 1) = \frac{12}{35}$ i oppgave a).

$$P(X = 0) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \left(\frac{12}{35} + \frac{1}{35} \right) = 1 - \frac{13}{35} = \underline{\underline{\frac{22}{35}}}$$

Oppgave 1-5

For en bedrift er kostnaden K i kroner ved produksjon av x enheter per uke av en varetype gitt ved

$$K(x) = 0,2x^2 + 140x + 7000$$

Bedriften har laget følgende program.

```

1 def K(x):
2     return 0.2*x**2 + 140*x + 7000
3
4 v = 260
5 h = 0.001
6 x = 0
7
8 while (K(x + h) - K(x))/h < v:
9     x = x + 1
10
11 print(x)

```

Python

Hva blir resultatet når programmet kjøres? Hva forteller dette svaret bedriften?

Del 2

Oppgave 2-1

Tabellen nedenfor viser timelønnen til en yrkesgruppe for noen år i perioden 2008-2022.

Årstall	2008	2010	2013	2015	2019	2022
Timelønn	272,55	285,50	307,30	314,00	327,60	340,10

- Hva har den gjennomsnittlige årlige prosentvise veksten i lønn vært i årene 2008-2022?
- Bruk tallene i tabellen til å lage en eksponentiell funksjon g som er en modell for timelønnen til denne yrkesgruppen x år etter 2008.

Per og Amalie hadde begge en timelønn på 272,55 kroner i 2008. Per har hatt en lønnsutvikling tilsvarende tabellen i starten av oppgaven, mens Amalies lønn har steget med 2,3 prosent per år. De har begge jobbet 1700 timer per år.

- Bestem den samlede lønnen til Amalie i årene 2008 til 2022. Bestem også den samlede lønnen til Per i disse årene.

Fagforeningen til Per krever at han i 2025 skal ha samme timelønn som Amalie. Vi går ut fra at Amalie fortsatt vil ha en lønnsvekst på 2,3 prosent per år.

- Hvor mange prosent må lønnen til Per gå opp hvert år dersom dette kravet skal innfris?

✓ Løsningsforslag

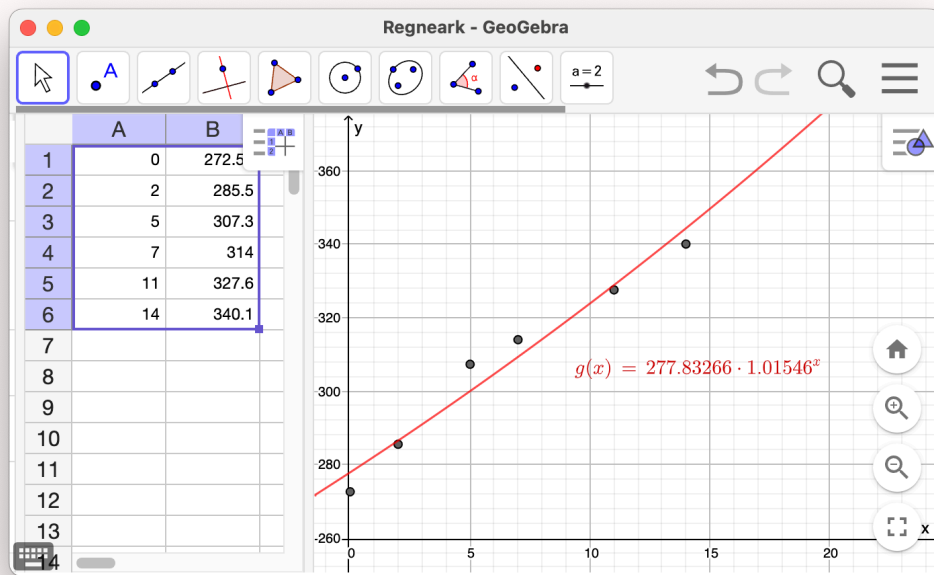
- Timelønna har vokst med $340,10 - 272,55 = 67,55$ kr i løpet av disse 14 årene. Vi kan sette opp dette uttrykket for å bestemme vekstfaktoren x

$$\begin{aligned}
 272,55 \cdot x^{14} &= 340,10 \\
 x &= \sqrt[14]{\frac{340,10}{272,55}} \\
 x &= 1,01594
 \end{aligned}$$

Den gjennomsnittlige årlige prosentvise økningen har vært 1,59 %.

- Jeg brukte regresjon i GeoGebra og fant at en god eksponentialmodell for lønnsveksten er

$$g(x) = 277,8 \cdot 1,0155^x$$



- c) Hvis man skal regne Per sin lønn riktig så må man egentlig vite lønna hvert år og summere opp årslønnene som ei rekke. Jeg bruker heller modell g som en tilnærming til Pers lønn.

For min del er det raskest å legge inn formelen $=272,55*1,023^{(2008-A2)}*1700$ i cellene til Amalie for å regne ut hennes lønn, og tilsvarende for Per.

År	Per	Amalie
2008	kr 472 260,00	kr 463 335,00
2009	kr 479 580,03	kr 473 991,71
2010	kr 487 013,52	kr 484 893,51
2011	kr 494 562,23	kr 496 046,07
2012	kr 502 227,94	kr 507 455,12
2013	kr 510 012,48	kr 519 126,59
2014	kr 517 917,67	kr 531 066,50
2015	kr 525 945,40	kr 543 281,03
2016	kr 534 097,55	kr 555 776,50
2017	kr 542 376,06	kr 568 559,36
2018	kr 550 782,89	kr 581 636,22
2019	kr 559 320,02	kr 595 013,86
2020	kr 567 989,48	kr 608 699,17
2021	kr 576 793,32	kr 622 699,25
2022	kr 585 733,62	kr 637 021,34
Sum	kr 7 906 612,22	kr 8 188 601,24

Amalies samlede lønn er omtrent 8 188 600 kr i perioden. Pers samlede lønn er omtrent 7 906 600 kr.

- d) Igjen så er det enklest og raskest for meg å bruke målsøking i Excel for å løse oppgaver som dette. Jeg lager en celle med vekstfak-

toeren til Per og målsøker slik at lønna i 2022 skal bli lik for begge.

C1							
=277,8*\$C\$1^(\$B21-2008)*1700							
	A	B	C	D	E	F	G
1		Vekstfaktor	1,0155				
2							
3		År	Per	Amalie			
4		2008	kr 472 260,00	kr 463 335,00			
5		2009	kr 479 580,03				
6		2010	kr 487 013,52				
7		2011	kr 494 562,23				
8		2012	kr 502 227,94				
9		2013	kr 510 012,48				
10		2014	kr 517 917,67				
11		2015	kr 525 945,40				
12		2016	kr 534 097,55				
13		2017	kr 542 376,06				
14		2018	kr 550 782,89				
15		2019	kr 559 320,02				
16		2020	kr 567 989,48				
17		2021	kr 576 793,32				
18		2022	kr 585 733,62				
19		2023	kr 594 812,49				
20		2024	kr 604 032,08				
21		2025	kr 613 394,58				

Målsøking

Sett celle: \$C\$21

Til verdi: 681994,51

Ved å endre celle: \$C\$1

Avbryt OK

Vekstfaktoren ble endret til 1,02185.

Lønningen til Per må stige med omtrent 2,185 % hvert år for at de skal ha lik lønn i 2025.

Oppgave 2-2a

Nedenfor ser du tre påstander. Avgjør i hvert tilfelle om påstanden er sann eller usann. Husk å vise tydelig hvordan du argumenterer og resonnerer.

a) Hvis $x > 0$, så er $(\ln x)^4 = 4 \ln x$.

Neste påstand finner du her: Har alle fjerdegradsfunksjoner ekstremalpunkt Påstand c finner du i Sannsynligheter ved lottospill

✓ Løsningsforslag

i Kommentar

Det er enklest å vise dette ved å tegne opp grafene til $(\ln x)^4$ og $4 \ln x$. Da ser man at disse uttrykkene ikke er like unntatt for $x = 1 \vee x = e^{\sqrt[3]{4}}$. Det er også mulig å løse oppgaven ved å argumentere med tekst slik som jeg har gjort nedenfor.

$(\ln x)^4$ er det samme som $\ln x \cdot \ln x \cdot \ln x \cdot \ln x$, og dette er ikke nødvendigvis det samme som $4 \ln x$. Som et konkret moteksempel lar vi $x = e$.

$$(\ln x)^4 = (\ln e)^4 = 1^4 = 1$$

Hvis vi sjekker $4 \ln x$ får vi

$$4 \ln x = 4 \ln e = 4 \cdot 1 = 4$$

$(\ln x)^4 \neq 4 \ln x$. Påstanden er ikke riktig.

Oppgave 2-2b

Nedenfor ser du tre påstander. Avgjør i hvert tilfelle om påstanden er sann eller usann. Husk å vise tydelig hvordan du argumenterer og resonnerer.

Oppgave a finner du her: Logaritmepåstand

b) Alle fjerdegradsfunksjoner må ha minst ett ekstremalpunkt.

Oppgave c finner du her: Sannsynligheter ved lottospill

✓ Løsningsforslag

En fjerdegradsfunksjon $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ har minst ett stasjonært dersom $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ har minst ett nullpunkt.

Tredjegradsfunksjonen f' vil alltid ha minst ett nullpunkt. f' vil oppføre seg på en av to måter - $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$. f' vil altså gå fra $-\infty$ mot $+\infty$ når x vokser. - $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = -\infty \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \infty$. f' vil altså bevege seg fra $+\infty$ mot $-\infty$ når x vokser.

Siden f' må krysse x -aksen så må det stasjonære punktet være enten et toppunkt eller et bunnpunkt.

En fjerdegradsfunksjon har alltid minst ett toppunkt eller bunnpunkt.

Oppgave 2-2c

Nedenfor ser du tre påstander. Avgjør i hvert tilfelle om påstanden er sann eller usann. Husk å vise tydelig hvordan du argumenterer og resonnerer.

Oppgave a finner du her Logaritmepåstand Oppgave b finner du her Har alle fjerdegradsfunksjoner ekstremalpunkt

I spillet Lotto trekkes det sju tilfeldige naturlige tall mindre eller lik 34 uten tilbakelegging.

c) Sannsynligheten for at alle de sju tallene er mindre enn 18, er like stor som sannsynligheten for at ingen av de sju tallene er mindre enn 18.

✓ Løsningsforslag

La den stokastiske variabelen X_1 være resultatet av første trekning fra de 34 tallene. Sannsynligheten for hvert tall er like stor. Det er 17 tall som er mindre enn 18, altså

$$P(X_1 < 18) = \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$$

La den stokastiske variabelen X_2 være resultatet av andre trekning fra de 33 tallene. $P(X_2 < 18) = \frac{16}{33}$. For hvert tall vi trekker vil tallene i teller og nevner reduseres med 1.

Vi får det samme mønsteret for at ingen tall er mindre enn 18. Sannsynligheten for tallet ikke er mindre enn 18 er gitt ved

$$P(X_1 \geq 18) = \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$$

$$P(X_2 \geq 18) = \frac{16}{33}$$

Mønstrene vil utvikle seg på samme måte.

Det er like sannsynlig at alle lottotalene er mindre enn 18 som at ingen av lottotalene er mindre enn 18.

Oppgave 2-5

I en kampanje deles det ut gratisbilletter til en fotballkamp. Av erfaring vet arrangøren at cirka 45 prosent av dem som får gratisbilletter, kommer på kampen.

- Det deles ut 1300 gratisbilletter. Bestem sannsynligheten for at minst 600 av disse billettene blir benyttet.
- Hvor mange gratisbilletter må de minst dele ut dersom sannsynligheten for at minst 600 av dem blir brukt skal være over 95 prosent?

✓ Løsningsforslag

- Vi kan regne med en binomisk sannsynlighetsfordeling her med $n = 1300$ og $p = 0,45$ siden

- billett-mottakerne har to muligheter: de kommer på kamp, eller de kommer ikke på kamp
- det er samme sannsynlighet for hver billett-mottaker
- så lenge billett-mottakerne er uavhengige av hverandre (hvis de 1300 billettene deles ut i stor by stemmer sikkert dette, men hvis det er på en veldig liten plass så er nok ikke billett-mottakerne egentlig uavhengige av hverandre)

Denne løses enklest i sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra, eller ved et enkelt program:

```
1 from scipy.stats import binom
2 P = 1-binom.cdf(599,1300,0.45)      # 1 - sannsynlighet for
3                                     # at opptil 599 kommer
4 print(f"P(X >= 600) = {P:.4f}")
```

Python

output: $P(X \geq 600) = 0.2094$

Sannsynligheten for at minst 600 mennesker kommer er 20,9 %.

- ```
1 from scipy.stats import binom
2 n = 1299
3 P = 0
4 while P < 0.95:
5 n = n + 1
6 P = 1-binom.cdf(599,n,0.45)
7 print(f"Ved n = {n} er P(X >= 600) = {P:.4f}.")
```

Python

output: Ved  $n = 1401$  er  $P(X \geq 600) = 0.9519$

Siden jeg allerede var igang med programmering så programmerte jeg denne også. Du kan også finne sannsynlighetene i Excel ved å lage et regneark på denne formen:

| Rad/Kol | A           | B                                                 |
|---------|-------------|---------------------------------------------------|
| 1       | Antall, $n$ | $P(X \leq n)$                                     |
| 2       | 1300        | <code>=BINOM.FORDELING.N(599;A2;0,45;SANN)</code> |

## Oppgave 2-6

Sammenhengen mellom lydstyrken  $L$  (målt i dB) og lydintensiteten  $I$  (målt i  $\text{W}/\text{m}^2$ ) er gitt ved

$$L = 120 + 10 \cdot \lg I$$

Menneskets øre har en smertegrense for lydstyrke som ligger omkring 130 dB.

- Bestem lydintensiteten når lydstyrken er 130 dB.
- Hvor mange prosent øker lydintensiteten dersom lydstyrken øker med 2 dB ?

Dersom effekten til lyden som sendes ut fra en lydkilde er  $E$ , vil lydintensiteten  $I$  på en avstand  $r$  (målt i m) fra denne lydkilden være

$$I = \frac{E}{4\pi \cdot r^2}$$

Lydstyrken fra et fly er 140 dB dersom du er 50 m fra flyet.

- Bestem den minste avstanden til dette flyet der lydstyrken er lavere enn 130 dB.

### ✓ Løsningsforslag

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & 130 = 120 + 10 \log I \\
 & 10 \log I = 130 - 120 \\
 & \log I = \frac{10}{10} \\
 & 10^{\log I} = 10^1 \\
 & I = 10
 \end{aligned}$$

**Lydintensiteten er  $10 \text{ W}/\text{m}^2$  når lydstyrken er 130 dB.**

- Når  $L = 132$  blir

$$I = 10^{\frac{132-120}{10}} = 10^{1,2} = 15,85$$

Økningen i prosent er

$$\frac{15,85 - 10}{10} = 0,585 = 58,5 \%$$

**Når lydstyrken øker fra 130 dB til 132 dB øker lydintensiteten med 58,5 %.**

- Vi vet at  $L = 140$  når  $r = 50$ . Jeg løser for  $E$  og finner (dette gjøres enklest i CAS)

$$L = 120 + 10 \log I$$

$$L = 120 + 10 \log \frac{E}{4\pi r^2}$$

$$140 = 120 + 10 \log \frac{E}{4\pi 50^2}$$

$$E = 1000000\pi$$

Jeg tolker formlene slik at et fly lager lyd med effekten  $E = 1\,000\,000\pi$  W, mens lydintensiteten og lydstyrken avtar med avstanden. Vi setter opp en likning med lydstyrke lik 130 dB og finner avstanden som kreves (dette gjøres også enklest i CAS).

$$130 = 120 + 10 \log \frac{1000000\pi}{4\pi r^2}$$

$$10 = 10 \log \frac{1000000}{4r^2}$$

$$1 = \log \frac{250000}{r^2}$$

$$10 = \frac{250000}{r^2}$$

$$r^2 = \frac{250000}{10}$$

$$r^2 = 25000$$

$$r = |158,113|$$

Ved 158,113 m så er altså lydstyrken 130 dB. Siden vi skulle finne den minste avstanden hvor lydstyrken var *lavere* enn 130 dB så runder jeg opp i svaret mitt.

**158,12 m fra flyet er den minste avstanden hvor lydstyrken er lavere enn 130 dB.**