

S2 eksamen E22

Oversikt

Del 1 – 2 timer – uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1a	Bestemt integral	integral	×
1-1b	Ubestemt integral	integral	×
1-2	Aritmetisk mur	rekker	×
1-3	Summen av ukjent uendelig geometrisk rekke	rekker	×
1-4	Forventningsverdi og varians fra sannsynlighetsfordeling	sannsynlighet, forventningsverdi, varians, diskrete sannsynlighetsfordelinger	×
1-6	Argumenter for hvorfor sette grensekostnad lik grenseinntekt	grenseinntekt og grensekostnad, økonomi	×
1-7	Ukjent programkode	programmering, utforskning, funksjoner	×

Del 2 – 3 timer – med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-2	Levetiden til lyspærer	kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger, forventningsverdi, sannsynlighet	✓
2-6	Simuler sannsynlighet for høyde over 175 cm	programmering, simulering, sannsynlighet, normalfordeling	✗

Del 1

Oppgave 1-1a

Regn ut integralet

$$\int_0^1 (4x^2 + 3) dx$$

✓ Løsningsforslag

$$\int_0^1 4x^2 + 3 dx = \left[\frac{4}{3}x^3 + 3x \right]_0^1 = \frac{4}{3} + 3 \cdot 1 - 0 = \frac{4}{3} + \frac{9}{3} = \underline{\underline{\frac{13}{3}}}$$

Oppgave 1-1b

Regn ut integralet

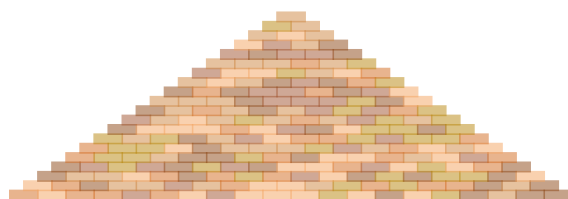
$$\int 4x\sqrt{x^2 + 2} dx$$

✓ Løsningsforslag

$$\begin{aligned} \int 4x\sqrt{x^2 + 2} dx, \quad u = x^2 + 2 \implies \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow du = 2x dx \\ \int 2\sqrt{u} du = 2 \int u^{\frac{1}{2}} du = 2 \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{3} (x^2 + 2)^{\frac{3}{2}} + C' = \frac{4}{3} (x^2 + 2) \sqrt{x^2 + 2} + C' \end{aligned}$$

Oppgave 1-2

- Forklar hva det vil si at en rekke $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ er aritmetisk.
- En murer skal lage en mur slik figuren viser. Bruk teorien om rekker til å bestemme hvor mange murstein mureren trenger, når han vet at det er totalt 20 rader med murstein.



Oppgave 1-3

Summen av en uendelig geometrisk rekke konvergerer mot 6.

Summen av tre første leddene er $\frac{38}{9}$.

Bestem summen av de fire første leddene.

✓ Løsningsforslag

1-3

Om oppgaveteksten

Denne oppgaven finnes i to ulike varianter (sannsynligvis på grunn av en skrivefeil i løsningsforslag eller oppgavesettet. Den ene varianten sier at summen av de tre første leddene er $38/9$, mens den andre varianten sier at summen av de seks første leddene er $38/9$. Løsningsmetoden min vil fungere uansett hvilken variant man tenker seg, men det er nok lurt å heller formel for sum av geometrisk rekke ($s_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}$) enn min framgangsmåte dersom man får oppgitt summen av et høyt antall ledd. Min metode er enkel når du bare trenger å tenke på 3 ledd, men skal du ta hensyn til 100 så må du regne mye!

Oppgavetekst

Summen av en uendelig geometrisk rekke konvergerer mot 6.

Sum av tre første ledd er $38/9$

Hva er sum av de fire første?

Løsningsforslag

Jeg kaller første ledd i rekka for x . Vet da at de tre første leddene må være:

$$x + xk + xk^2 = \frac{38}{9}$$

Som kan faktoriseres til

$$x(1 + k + k^2) = \frac{38}{9}$$

Summen for uendelig geometrisk rekke gir:

$$\frac{x}{1-k} = 6$$

Løser den likningen for x og setter inn i uttrykket for sum av 3 første ledd

$$x = 6(1-k)$$

$$6(1-k)(1+k+k^2) = \frac{38}{9}$$

$$(1-k)(1+k+k^2) = \frac{38}{9 \cdot 6} = \frac{38}{54} = \frac{19}{27}$$

$$1+k+k^2-k-k^2-k^3 = \frac{19}{27}$$

$$1-k^3 = \frac{19}{27}$$

$$k^3 = 1 - \frac{19}{27} = \frac{8}{27} \Rightarrow k = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Vi har nå funnet k og kan enkelt finne x :

$$x = 6(1-k) = 6\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

Ledd 4 må være:

$$xk^3 = 2 \cdot \frac{8}{27} = \frac{16}{27}$$

Summen av de fire første leddene blir da summen av de tre første pluss dette fjerde leddet

$$\frac{38}{9} + \frac{16}{27} = \frac{114}{27} + \frac{16}{27} = \frac{130}{27}$$

Summen av fire første ledd er

$$\underline{\underline{\frac{130}{27}}}$$

Alternativ løsning

Fra formel for sum av uendelig geometrisk rekke vet vi at

$$\frac{a_1}{1-k} = 6$$

Samtidig kan sum av de tre første leddene uttrykkes som

$$\frac{38}{9} = a_1 \cdot \frac{k^3 - 1}{k - 1}$$

Vi har altså to likninger og to ukjente, a_1 og k .

Vi kan løse den første likningen for a_1 og sette inn i den andre likningen

$$a_1 = 6(1 - k)$$

$$\frac{38}{9} = 6(1 - k) \cdot \frac{k^3 - 1}{k - 1} = 6 \cdot \frac{(k^3 - 1)(1 - k)}{k - 1}$$

Siden $(1 - k) = (-1)k - 1$ så bytter jeg ut denne faktoren i telleren for å kunne forkorte brøken på høyre side. Samtidig deler jeg på 6 på begge sider.

$$\frac{38}{54} = \frac{(k^3 - 1)(-1)\cancel{(k - 1)}}{\cancel{(k - 1)}} = (k^3 - 1)(-1) = 1 - k^3$$

Vi kan nå løse likningen

$$\frac{38}{54} = 1 - k^3$$

$$k^3 = 1 - \frac{38}{54} = \frac{16}{54} = \frac{8}{27}$$

$$k = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

Når vi endelig har k så kan vi finne a_1 med

$$a_1 = 6(1 - k) = 6\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

Og til slutt kan vi finne summen av de fire første leddene med sumformelen

$$s_4 = a_1 \cdot \frac{k^4 - 1}{k - 1} = 2 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 1}{\left(\frac{2}{3}\right) - 1} = 2 \cdot \frac{\frac{16}{81} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = 2 \cdot \frac{-\frac{65}{81}}{-\frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{\frac{65}{81}}{\frac{1}{3}} = \frac{130}{27}$$

Summen av de fire første leddene er

$$\underline{\underline{\frac{130}{27}}}$$

Oppgave 1-4

En sannsynlighetsfordeling er gitt ved tabellen nedenfor.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,2	k	$2k$	$5k$

- Forklar hvorfor k må være 0,1. Bestem forventningsverdien $E(X)$.
- Bestem variansen $\text{Var}(X)$

✓ Løsningsforslag

- Summen av sannsynlighetene for alle utfallene skal være 1. Vi har dermed at

$$0,2 + k + 2k + 5k = 1$$

$$8k = 0,8$$

$$k = 0,1$$

Forventningsverdien er gitt ved

$$\sum x \cdot P(X = x) = 0 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,5 = 2,0$$

k må være lik 0,1 og forventningsverdien $E(X) = 2$.

b) Variansen til X er gitt ved

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x)$$

Dette er enklest å regne ut ved å bruke sannsynlighetsfordelingen:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,2	0,1	0,2	0,5
$(x_i - \mu)^2$	$(0 - 2)^2 = 4$	$(1 - 2)^2 = 1$	$(2 - 2)^2 = 0$	$(3 - 2)^2 = 1$
$(x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x)$	$4 \cdot 0,2 = 0,8$	$1 \cdot 0,1 = 0,1$	0	$1 \cdot 0,5 = 0,5$

Summen av kvadratavvikene er 1,4.

Variansen $\text{Var}(X) = 1,4$.

Oppgave 1-6

Forklar hvorfor vi kan sette grensekostnad lik grenseinntekt når vi skal finne det største overskuddet.

Oppgave 1-7

En elev har skrevet følgende kode

```
1 from math import sqrt          # importerer kvadratrotfunksjon
2 a = 0
3 b = 2
4 n = 10000
5
6 def f(x):
7     return x**2 + 2
8
9 I = 0
10 h = (b - a)/n
11
12 for i in range(n):
13     I = I + f(a + i*h)*h
14
15 print(round(I,3))
```

a) Forklar hva eleven ønsker å regne ut.

b) Hva blir det eksakte svaret på oppgaven eleven ønsker å løse?

Del 2

Oppgave 2-2

Levetiden T i timer til en tilfeldig lyspære av en bestemt type er en stokastisk variabel. Det viser seg at

$$P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

der tetthetsfunksjonen f er gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} k \cdot e^{-0,005t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

- a) Vis at $k = 0,005$.
- b) Hva er sannsynligheten for at lyspærens levetid er mer enn 400 timer?

Forventningsverdien μ til en kontinuerlig stokastisk variabel med tetthetsfunksjonen f er gitt ved

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

- c) Bestem forventningsverdien til T .

✓ Løsningsforslag

- a) Siden $f(t) = 0$ når $t \leq 0$ så vil

$$\int_{-\infty}^0 f(t) dt = 0$$

Vi trenger derfor kun å bry oss tilfellet hvor $t > 0$.

Vi vet at et krav til sannsynlighetsfordelinger er at summen av alle sannsynlighetene skal bli 1. For kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger har vi altså

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

I vårt tilfelle ønsker vi altså å bestemme k slik at den tilfredsstiller likningen

$$\int_0^{\infty} k \cdot e^{-0,005t} dt = 1$$

Vi kan løse denne i GeoGebra eller vi kan integrere for hånd:

$$\begin{aligned} \left[\frac{k}{-0,005} \cdot e^{-0,005t} \right]_0^{\infty} &= 1 \\ \left(\frac{k}{-0,005} \cdot 0 \right) - \left(\frac{k}{-0,005} \cdot 1 \right) &= 1 \\ \frac{-k}{-0,005} &= 1 \\ k &= 0,005 \end{aligned}$$

Jeg har vist at $k = 0,005$

- b) Jeg kan bruke integralet av tetthetsfunksjonen til å beregne sannsynligheten. Sannsynligheten for at lyspæras levetid er mellom 0 og 400 timer er gitt ved

$$\int_0^{400} 0,005 \cdot e^{-0,005t} dt = 1 - \frac{1}{e^2}$$

Siden summen av sannsynlighetene for alle utfallene er 1 så kan vi finne sannsynligheten for at lyspæra varer mellom 400 og uendelig timer ved å ta

$$1 - \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2}$$

Sannsynligheten for at lyspæras levetid er mer enn 400 timer er $\frac{1}{e^2} \approx 0,135$.

- c) Jeg bruker uttrykket for forventningsverdi som står i oppgaveteksten og beregner ved hjelp av GeoGebra:

$$\mu_T = \int_0^{\infty} t \cdot 0,005 \cdot e^{-0,005t} dt = 200$$

Forventningsverdien for T er $\mu_T = 200$ timer.

Oppgave 2-6

På en skole er det 323 jenter og 301 gutter. La X være høyden til en tilfeldig valgt jente og Y være høyden til en tilfeldig valgt gutt. Vi antar at X og Y er normalfordelte med $\mu_X = 168$ cm, $\mu_Y = 180$ cm, $\sigma_X = 6$ cm og $\sigma_Y = 8$ cm.

Lag et program som du kan bruke til å simulere sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er høyere enn 175 cm. Bestem denne sannsynligheten.

Programmeringshjelp

Denne hjelpen ble ikke gitt i oppgaveteksten! For å trekke ut en tilfeldig normalfordelt elev så må du bruke et ekstern bibliotek som `numpy` eller `random`. Med `import random` kan du bruke følgende kode lagre høyden til én tilfeldig jenteelev som `X`: 📌

```
X = random.gauss(168, 6)
```

Løsningsforslag

Her kommer tekst

```
```python {python caption=«Oppgave 2-6» #code:oppg26} import numpy as np import random
n_x = 323 n_y = 301 mu_x = 168 mu_y = 180 s_x = 6 s_y = 8 grense = 175 antall_simuleringer
= 10000

antall_gunstige = 0
```