

S2 eksamen H2023

Oversikt

Del 1 — 2 timer — uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1	Bestemt integral 3	integral	✓
1-2a	Uendelig geometrisk rekke	uendelig rekke, rekker	✓
1-2b	Aritmetisk rekke	rekker	✓
1-3	Grensekostnader og enhetskostnader fra graf	grenseinntekt og grensekostnad, enhetskostnad, tolke grafer	✓
1-4	Ukjent program h23	programmering	✓
1-5	Tunge kuller i kasse	sannsynlighet, diskrete sannsynlighetsfordelinger, forventningsverdi, varians	✓

Del 2 — 3 timer — med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-1	Modell for etterspørsel av vare	etterspørsel, modellering, regresjon, grenseinntekt og grensekostnad	✓
2-2	Miriam og Hermods sparing	sparing, rekker	✓
2-3	Normalfordelte vinterdekk	normalfordeling, hypotesetest	✓
2-4	Rekursiv sammenheng mellom pentagontall	rekursiv sammenheng, programmering, rekker	✓
2-5	Simuler sannsynlighet for høyden til 24 måneder gammelt barn	programmering, simulering, normalfordeling	✓

Del 1

Oppgave 1-1

Regn ut integralet

$$\int_{-1}^1 (x^3 + 2x) dx$$

Hva forteller svaret deg?

✓ Løsningsforslag

Dette integralet trenger ingen spesielle regler eller teknikker for å løses.

$$\int_{-1}^1 (x^3 + 2x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{2}x^2 \right]_{-1}^1$$

Jeg setter inn grensene og får

$$\left(\frac{1}{4}1^4 + 1^2 \right) - \left(\frac{1}{4}(-1)^4 + (-1)^2 \right) = \underline{\underline{0}}$$

Siden svaret på integralet er 0 så må det være like mye areal avgrenset av grafen på oversiden av x -aksen som på undersiden av x -aksen.

Oppgave 1-2a

En uendelig geometrisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ konvergerer mot 8.

Bestem summen av de fire første leddene, når du får vite at $a_1 = 4$

✓ Løsningsforslag

Jeg bruker formelen for uendelig geometrisk rekke. Jeg setter inn kjente verdier for å bestemme k :

$$\frac{a_1}{1-k} = \frac{4}{1-k} = 8 \Leftrightarrow \frac{4}{8} = 1-k \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Summen av de fire første leddene er $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$

Summen av de fire første leddene er 7,5

Oppgave 1-2b

I en aritmetisk rekke er $a_1 + a_4 + a_7 = 114$.

Bestem a_4 .

✓ Løsningsforslag

Jeg vet at i en aritmetisk rekke er

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Vi kan dermed si at $a_1 = a_4 - 3d$ og $a_7 = a_4 + 3d$.

Jeg setter inn for a_1 og a_7 i uttrykket og får

$$a_4 - 3d + a_4 + a_4 + 3d = 114 \Leftrightarrow 3a_4 = 114 \Leftrightarrow a_4 = 38$$

$$\underline{\underline{a_4 = 38}}$$

Oppgave 1-3

I koordinatsystemet nedenfor ser du grafen til en kostnadsfunksjon K sammen med tre rette linjer.

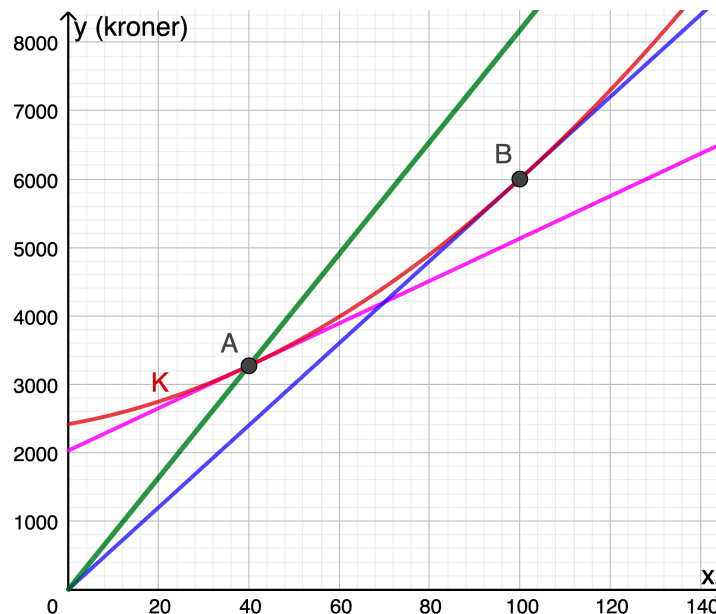
De tre rette linjene er grafene til funksjonene f , g , h der

$$f(x) = 31x + 2030$$

$$g(x) = 60x$$

$$h(x) = 81,75x$$

To av linjene tangerer grafen til K . Vi kaller tangeringspunktene A og B .



Figur 1: Kostnadsfunksjonen $K(x)$

- Bestem enhetskostnaden ved produksjon av 40 enheter.
- Forklar at grensekostnaden ved produksjon av 40 enheter er 31 kroner.
- Bestem den minste enhetskostnaden.

✓ Løsningsforslag

- Enhetskostnadene er gitt ved

$$E(x) = \frac{K(x)}{x}$$

Jeg ser at punktet linja $f(x) = 31x + 2030$ tangerer K ved $x = 40$. Dermed har vi

$$K(40) = f(40) = 31 \cdot 40 + 2030 = 1240 + 2030 = 3270$$

Ved å sette inn i uttrykket for enhetskostnadene får vi

$$E(40) = \frac{K(40)}{40} = \frac{3270}{40} = 81,75$$

Enhetskostnadene ved produksjon av 40 enheter er 81,75 kr.

Dette stemmer perfekt med uttrykket for $h(x)$, og da vet vi også at den grønne linja i figuren faktisk skjærer grafen nøyaktig i $x = 40$.

- Siden A er et tangeringspunkt på grafen til K , og A ligger på $x = 40$, så vil stigningstallet til tangenten i A være det samme som den deriverte til K i punktet A . Grensekostnadene er definert som den deriverte av kostnadsfunksjonen.

Tangenten til K ved $x = 40$ har funksjonsuttrykk $f(x) = 31x + 2030$, dermed er både stigningstallet, den deriverte og grensekostnadene lik 31 kroner.

- Vi har lavest grensekostnader når $E'(x) = 0$, og dette betyr

$$E'(x) = 0$$

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 0$$

$$\frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} = 0$$

$$K'(x) \cdot x = K(x)$$

Den nederste linja forteller oss at vi finner den laveste enhetskostnaden når den lineære funksjonen $y = K'(x) \cdot x$ skjærer $K(x)$. Enklere sagt vil det si at vi har lavest enhetskostnad når tangenten til K går gjennom origo. Jeg ser fra grafen at dette gjelder den blå linja og punktet B .

Hvis vi fortsetter likningsløsningen litt til får vi:

$$K'(x) \cdot x = K(x)$$

$$K'(x) = \frac{K(x)}{x}$$

$$K'(x) = E(x)$$

De laveste enhetskostnadene er altså $K'(x)$, eller stigningstallet til tangenten i punktet B . Tangenten i B har funksjonsuttrykk $g(x) = 60x$.

De laveste enhetskostnadene er 60 kr per enhet.

Oppgave 1-4

En elev har skrevet koden nedenfor

```

1 N = 1000
2 start = -2
3 slutt = 2
4 dx = (slutt - start)/N
5
6 def f(x):
7     return x**2-1
8
9 S = 0
10 for i in range(N):
11     xi = start + i*dx
12     S = S + abs(f(xi))*dx # abs(f(x)) gir absoluttverdien til f(x)
13
14 print(S)
```

- Forklar hva eleven ønsker å regne ut med denne koden.
- Finn ved regning den verdien eleven ønsker å bestemme.

✓ Løsningsforslag

- Programmet forsøker å regne ut en tilnærmingverdi for arealene mellom x -aksen, grafen til $f(x) = x^2 - 1$, linja $x = -2$ og linja $x = 2$.

Ved å bruke absoluttverdifunksjonen så tar programmet hensyn til at $f < 0$ i deler av intervallet.

- b) Jeg ser at $f(x)$ har nullpunkter i $x = 1$ og $x = -1$. På grunn av symmetri vil

$$\int_{-2}^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx$$

For å regne ut det samlede arealet kan jeg derfor bruke uttrykket (minustegn foran integral nummer 2, siden grafen ligger under x -aksen i dette intervallet)

$$2 \int_1^2 (x^2 - 1) dx - \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx$$

Jeg finner først det ubestemte integralet

$$F(x) = \int (x^2 - 1) dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C$$

Jeg finner så arealet ved

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (F(2) - F(1)) - (F(1) - F(-1)) \\ & 2 \cdot F(2) - 3 \cdot F(1) + F(-1) \\ & 2\left(\frac{1}{3}2^3 - 2\right) - 3\left(\frac{1}{3}1^3 - 1\right) + \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)\right) \\ & \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{3}{3} - 3\right) + \left(\frac{-1}{3} + 1\right) \\ & -4 + 3 + 1 + \frac{16}{3} - \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4 \end{aligned}$$

Verdien eleven forsøkte å bestemme er 4.

Oppgave 1-5

I en kasse ligger det tre typer kuler. Disse veier henholdsvis 4 kg, 5 kg og 10 kg. Dersom vi trekker tilfeldig en kule, er sannsynligheten $\frac{1}{4}$ for at kulen veier 4 kg og $\frac{1}{2}$ for at den veier 5 kg.

- a) Vis at $E(X) = 6$ kg. Regn ut variansen til X .

Vi trekker tilfeldig en kule og legger den tilbake igjen. Dette gjør vi to ganger. La X_1 være vekten til den første kulen vi trekker, og X_2 vekten til den andre kulen vi trekker. La $Y = X_1 + X_2$.

- b) Sett opp sannsynlighetsfordelingen til Y .
c) Bestem $P(Y > 10)$.

✓ Løsningsforslag

- a) Siden det kun er tre typer kuler så må sannsynligheten for å trekke en kule som veier 10 kg være

$$P(10 \text{ kg}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Forventningsverdien er summen av produktene av sannsynlighet $\times$ verdi. Altså:

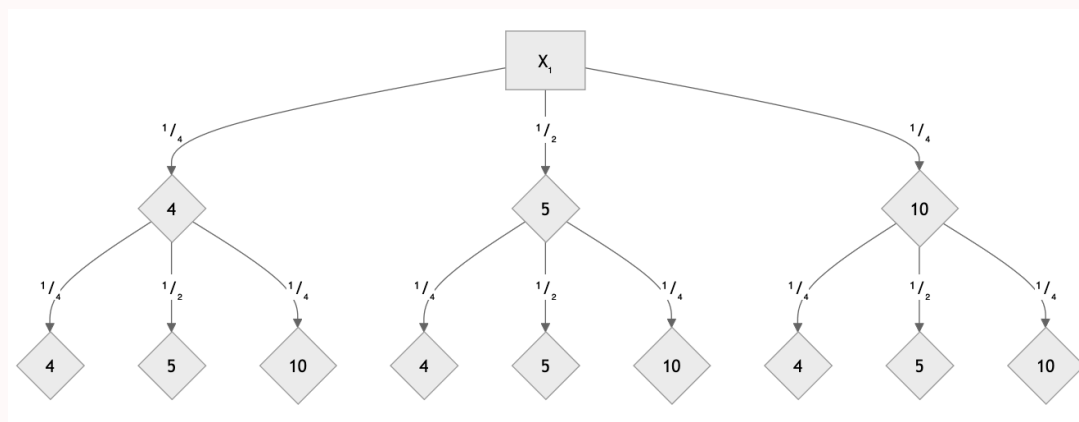
$$E(X) = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 10 = \frac{2}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

For å finne variansen må vi finne differansen til gjennomsnittet for hver verdi, kvadrere denne differansen og multiplisere den med sannsynligheten for observasjonsverdien.

x	$E(x) - x$	$P(X = x)$	$(E(x) - x)^2 \cdot P(X = x)$
4	2	$\frac{1}{4}$	$2^2 \cdot \frac{1}{4} = 1$
5	1	$\frac{1}{2}$	$1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
10	4	$\frac{1}{4}$	$4^2 \cdot \frac{1}{4} = 4$
Sum			5,5

Jeg har vist at forventningsverdien er 6 kg og at variansen er 5,5 kg.

b)



Figur 2: Valgtrø til oppgave 1-5

Se valgtreet over. Jeg ser at utfallene for $Y = X_1 + X_2$ er 8, 9, 10, 14, 15 og 20. Jeg bruker valgtreet til å beregne sannsynligheten for hvert utfall

y	$P(Y = y)$
8	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
9	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{4}$
10	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
14	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{8}$
15	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{4}$
20	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

c) $P(Y > 10)$ betyr sannsynligheten for at Y er større 10. Det stemmer når $Y = 14$, $Y = 15$ og $Y = 20$.

$$P(Y > 10) = P(Y = 14) + P(Y = 15) + P(Y = 20) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{2+4+1}{16} = \underline{\underline{\frac{7}{16}}}$$

Del 2

Oppgave 2-1

Tabellen viser den daglige etterspørselen etter en vare for ulike priser.

Pris (kroner)	Etterspørsel
10	237
20	111
30	49
40	22
50	12

- a) Lag en modell q som kan brukes til å beskrive sammenhengen mellom prisen p (i kroner) og den daglige etterspørselen. Vurder gyldighetsområdet til modellen.
- b) Hva bør prisen for varen være dersom bedriften skal selge 70 enheter per dag?

For en annen vare viser det seg at $p = 79 - 12,2 \ln x$.

Her er x den daglige etterspørselen når varen koster p kroner.

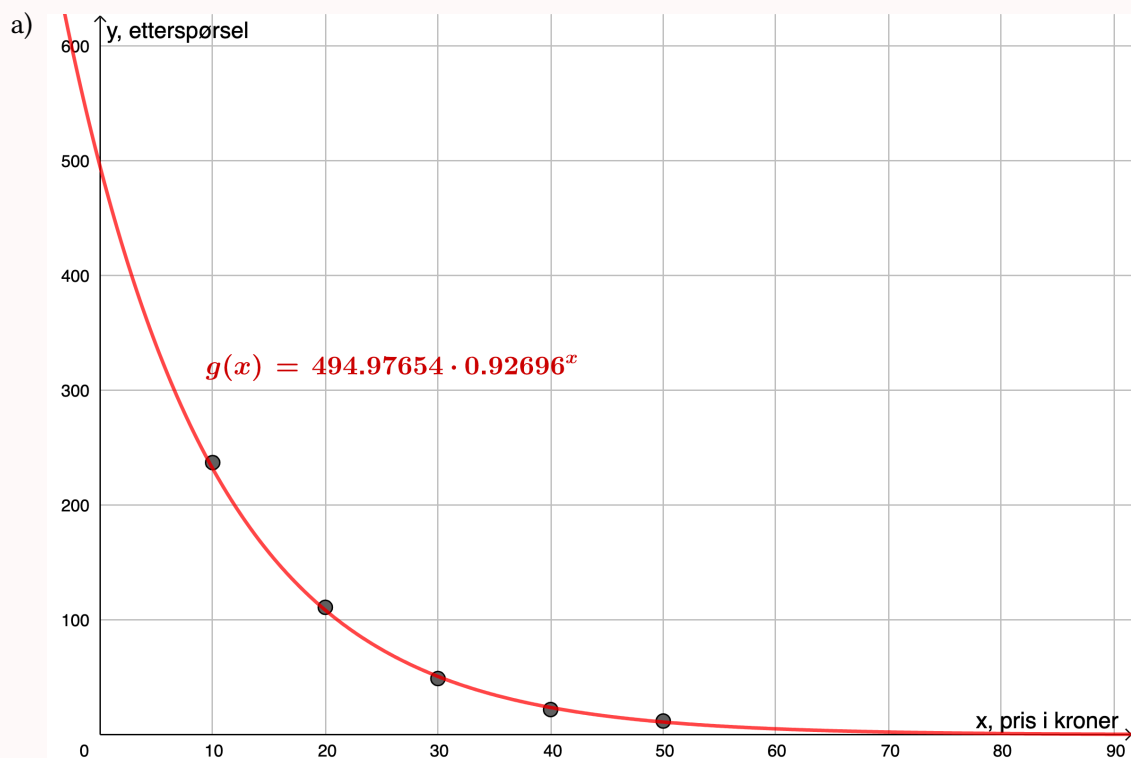
- c) Hva må prisen være dersom inntektene skal bli størst mulig?

Kostnadene K (i kroner) ved produksjon og salg av x enheter per dag er gitt ved

$$K(x) = 0,021x^2 + 10x + 910$$

- d) Hvor mange enheter må produseres og selges per dag for at grenseinntektene skal bli lik grensekostnadene? Gi en praktisk tolkning av svaret

✓ Løsningsforslag



Figur 3: Eksponentiell modell til oppgave 2-1a

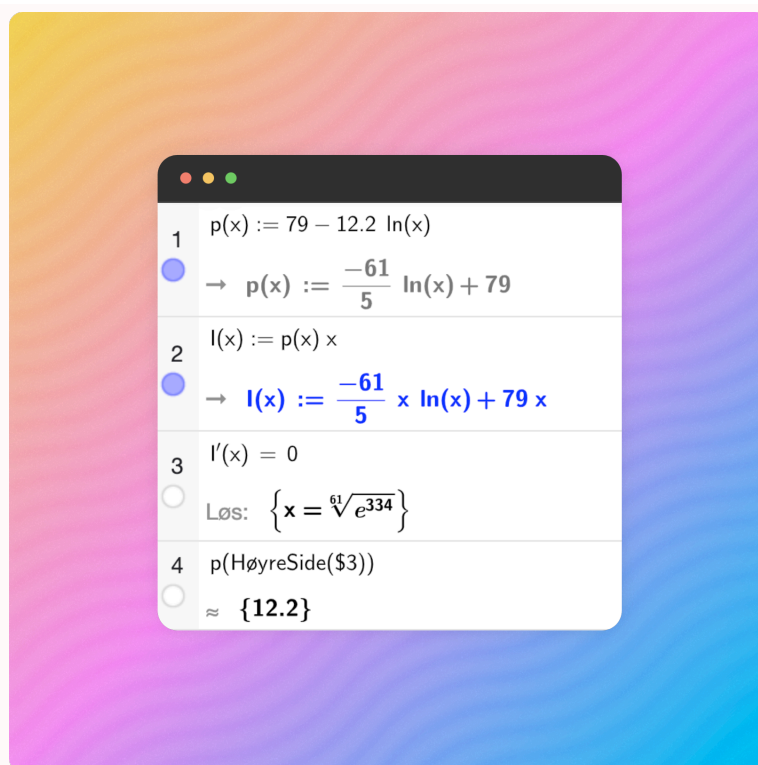
Jeg brukte GeoGebra til å lage en eksponentiell modell som passet godt til dataene. Jeg vurderer at gyldighetsområdet til modellen er for priser fra omtrent 5 kroner til 70 kroner. Hvis varen hadde kostet veldig lite, så ville nok etterspørselen vært enda større (teoretisk kan man ofte tenke seg at etterspørselen går mot uendelig når prisen går mot null). Det er vanskelig å sette en øvre grense her, men ved prisen 70 kroner så er etterspørselen kun 2,4 – dette er veldig lavt sammenlignet med etterspørselen på 237 ved prisen 10 kroner.

En modell som viser sammenhengen mellom prisen, p , i kroner og etterspørselen er $e(p) = 495 \cdot 0,927^p$

b) Jeg brukte GeoGebra og løste $e(p) = 70$ i CAS.

Prisen for varen bør være 25,8 kroner dersom bedriften skal selge 70 enheter per dag.

c)



Figur 4: CAS til oppgave 2-1c

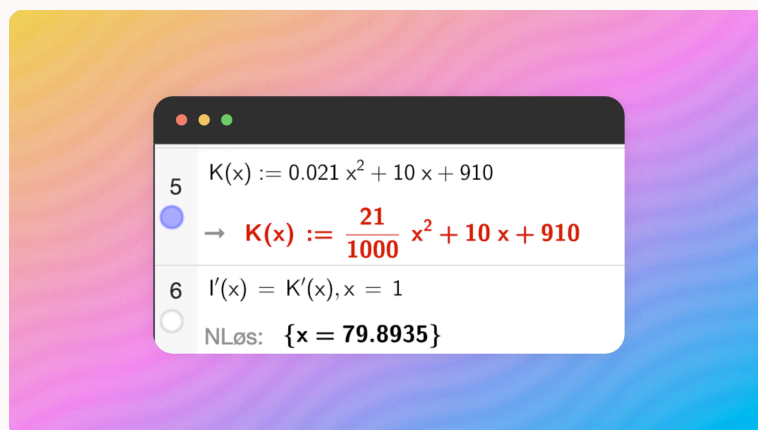
Gitt at $p(x) = 79 - 12,2 \ln x$ er en funksjon som angir prisen ved etterspørselen x , så er inntekten gitt ved

$$I(x) = p(x) \cdot x = (79 - 12,2 \ln x) \cdot x$$

Jeg brukte GeoGebra til å finne ekstremalpunktet til I ved å derivere funksjonen og sette den deriverte lik null. Jeg sjekket også at dette punktet var et toppunkt i grafikkfeltet.

Vi har høyest inntekt ved etterspørselen 238,75 enheter, da er prisen $p(238,75) = 12,2$.

Oppgave 2-1d



Figur 5: CAS til oppgave 2-1d

Jeg la inn funksjonsuttrykket for $K(x)$ i CAS. CAS gir at $I' = K'$ ved $x \approx 80$.

Grenseinntektene er lik grensekostnadene når det produseres og selges 80 enheter. Når grenseinntektene er lik grensekostnadene så har vi det største overskuddet – dette er altså den optimale produksjons- og salgsmengden.

Oppgave 2-2

Miriam har bestemt seg for å sette inn 20 000 kroner på en konto i begynnelsen av hvert år. Det første sparebeløpet vil hun sette inn i begynnelsen av 2024, det andre beløpet i begynnelsen av 2025, og så videre. Anta at hun får en fast årlig rentesats på 3,5 prosent.

- a) Vis at Miriam vil ha 565 594 kroner på kontoen like etter at hun har satt inn innskudd nummer 20.

Hermod har også bestemt seg for å spare. Han vil sette inn et fast beløp i begynnelsen av hvert år. Det første sparebeløpet setter han inn i begynnelsen av 2024. Han får også en fast årlig rentesats på 3,5 prosent. Hermod har regnet ut at han vil ha 692 852 kroner på kontoen like etter at innskudd nummer 20 er satt inn.

- b) Bestem beløpet Hermod må sette inn hvert år for at dette skal stemme.

Miriam ønsker at det skal være 1 000 000 kroner på kontoen like etter at hun har satt inn innskudd nummer 20. For å få til dette, vil hun øke innskuddet med et fast beløp hvert år. Første innskudd skal være 20 000 kroner.

- c) Hvor mye må hun øke innskuddet med hvert år?

✓ Løsningsforslag

a)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	Rentesats	3,50 %		Innskudd nr	År	Sparebeløp	Innskudd start av år	Innskudd ved årsslutt		Innskudd nr	År	Sparebeløp	Innskudd start av år	Innskudd ved årsslutt
3				1	2024	kr 20 000,00	kr 20 000,00	kr 20 700,00		1	2024	kr 20 000,00	kr 20 000,00	=G3*(1+\$B\$2)
4				2	2025	kr 20 000,00	kr 40 700,00	kr 42 124,50		2	2025	=F3	=F4+H3	=G4*(1+\$B\$2)
5				3	2026	kr 20 000,00	kr 62 124,50	kr 64 298,86		3	2026	=F4	=F5+H4	=G5*(1+\$B\$2)
6				4	2027	kr 20 000,00	kr 84 298,86	kr 87 249,32		4	2027	=F5	=F6+H5	=G6*(1+\$B\$2)
7				5	2028	kr 20 000,00	kr 107 249,32	kr 111 003,04		5	2028	=F6	=F7+H6	=G7*(1+\$B\$2)
8				6	2029	kr 20 000,00	kr 131 003,04	kr 135 588,15		6	2029	=F7	=F8+H7	=G8*(1+\$B\$2)
9				7	2030	kr 20 000,00	kr 155 588,15	kr 161 033,74		7	2030	=F8	=F9+H8	=G9*(1+\$B\$2)
10				8	2031	kr 20 000,00	kr 181 033,74	kr 187 369,92		8	2031	=F9	=F10+H9	=G10*(1+\$B\$2)
11				9	2032	kr 20 000,00	kr 207 369,92	kr 214 627,86		9	2032	=F10	=F11+H10	=G11*(1+\$B\$2)
12				10	2033	kr 20 000,00	kr 234 627,86	kr 242 839,84		10	2033	=F11	=F12+H11	=G12*(1+\$B\$2)
13				11	2034	kr 20 000,00	kr 262 839,84	kr 272 039,23		11	2034	=F12	=F13+H12	=G13*(1+\$B\$2)
14				12	2035	kr 20 000,00	kr 292 039,23	kr 302 260,61		12	2035	=F13	=F14+H13	=G14*(1+\$B\$2)
15				13	2036	kr 20 000,00	kr 322 260,61	kr 333 539,73		13	2036	=F14	=F15+H14	=G15*(1+\$B\$2)
16				14	2037	kr 20 000,00	kr 353 539,73	kr 365 913,62		14	2037	=F15	=F16+H15	=G16*(1+\$B\$2)
17				15	2038	kr 20 000,00	kr 385 913,62	kr 399 420,59		15	2038	=F16	=F17+H16	=G17*(1+\$B\$2)
18				16	2039	kr 20 000,00	kr 419 420,59	kr 434 100,31		16	2039	=F17	=F18+H17	=G18*(1+\$B\$2)
19				17	2040	kr 20 000,00	kr 454 100,31	kr 469 993,83		17	2040	=F18	=F19+H18	=G19*(1+\$B\$2)
20				18	2041	kr 20 000,00	kr 489 993,83	kr 507 143,61		18	2041	=F19	=F20+H19	=G20*(1+\$B\$2)
21				19	2042	kr 20 000,00	kr 527 143,61	kr 545 593,64		19	2042	=F20	=F21+H20	=G21*(1+\$B\$2)
22				20	2043	kr 20 000,00	kr 565 593,64	kr 585 389,41		20	2043	=F21	=F22+H21	=G22*(1+\$B\$2)
23				21	2044	kr 20 000,00	kr 605 389,41	kr 626 578,04		21	2044	=F22	=F23+H22	=G23*(1+\$B\$2)

Figur 6: Sparing til oppgave 2-2a

Jeg satt opp en oversikt over sparingen i Excel, hvor jeg beregnet innskuddet på kontoen i starten og slutten av hvert år.

Etter det 20. innskuddet så var det 565 593,64 kr på kontoen.

b)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
				Innskudd nr	År	Sparebeløp	Innskudd start av år	Innskudd ved årsslutt		Innskudd nr	År	Sparebeløp	Innskudd start av år	Innskudd ved årsslutt
27				1	2024	kr 24 500,00	kr 24 500,00	kr 25 357,50		1	2024	kr 20 000,00	kr 20 000,00	=G4*(1+\$B\$2)
28				2	2025	kr 24 500,00	kr 49 857,50	kr 51 602,51		2	2025	=F28	=F29+H28	=G29*(1+\$B\$2)
29				3	2026	kr 24 500,00	kr 76 102,51	kr 78 766,10		3	2026	=F29	=F30+H29	=G30*(1+\$B\$2)
30				4	2027	kr 24 500,00	kr 103 266,10	kr 106 880,41		4	2027	=F30	=F31+H30	=G31*(1+\$B\$2)
31				5	2028	kr 24 500,00	kr 131 380,41	kr 135 978,73		5	2028	=F31	=F32+H31	=G32*(1+\$B\$2)
32				6	2029	kr 24 500,00	kr 160 478,73	kr 166 095,48		6	2029	=F32	=F33+H32	=G33*(1+\$B\$2)
33				7	2030	kr 24 500,00	kr 190 595,48	kr 197 266,33		7	2030	=F33	=F34+H33	=G34*(1+\$B\$2)
34				8	2031	kr 24 500,00	kr 221 766,33	kr 229 528,15		8	2031	=F34	=F35+H34	=G35*(1+\$B\$2)
35				9	2032	kr 24 500,00	kr 254 028,15	kr 262 919,13		9	2032	=F35	=F36+H35	=G36*(1+\$B\$2)
36				10	2033	kr 24 500,00	kr 287 419,13	kr 297 478,80		10	2033	=F36	=F37+H36	=G37*(1+\$B\$2)
37				11	2034	kr 24 500,00	kr 321 978,80	kr 333 248,06		11	2034	=F37	=F38+H37	=G38*(1+\$B\$2)
38				12	2035	kr 24 500,00	kr 357 748,06	kr 370 269,24		12	2035	=F38	=F39+H38	=G39*(1+\$B\$2)
39				13	2036	kr 24 500,00	kr 394 769,24	kr 408 586,17		13	2036	=F39	=F40+H39	=G40*(1+\$B\$2)
40				14	2037	kr 24 500,00	kr 433 086,17	kr 448 244,18		14	2037	=F40	=F41+H40	=G41*(1+\$B\$2)
41				15	2038	kr 24 500,00	kr 472 744,18	kr 489 290,23		15	2038	=F41	=F42+H41	=G42*(1+\$B\$2)
42				16	2039	kr 24 500,00	kr 513 790,23	kr 531 772,89		16	2039	=F42	=F43+H42	=G43*(1+\$B\$2)
43				17	2040	kr 24 500,00	kr 556 272,89	kr 575 742,44		17	2040	=F43	=F44+H43	=G44*(1+\$B\$2)
44				18	2041	kr 24 500,00	kr 600 242,44	kr 621 250,92		18	2041	=F44	=F45+H44	=G45*(1+\$B\$2)
45				19	2042	kr 24 500,00	kr 645 750,92	kr 668 352,20		19	2042	=F45	=F46+H45	=G46*(1+\$B\$2)
46				20	2043	kr 24 500,00	kr 692 852,20	kr 717 102,03		20	2043	=F46	=F47+H46	=G47*(1+\$B\$2)
47				21	2044	kr 24 500,00	kr 741 602,03	kr 767 558,10		21	2044	=F47	=F48+H47	=G48*(1+\$B\$2)
48														
49														

Figur 7: Sparing og målsøking til oppgave 2-2b

Jeg brukte samme oppsett i Excel og brukte målsøking til å sette celle G47 til 692 852 kr ved å endre celle F28. Jeg fikk da 24 499,99 kr som sparebeløp.

Hermod må spare 24 500 kr hvert år for å ha 692 852 kr etter 20 år.

c)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
				Innskudd nr	År	Sparebeløp	Innskudd start av år	Innskudd ved årsslutt		Innskudd nr	År	Sparebeløp	Innskudd start av år	Innskudd ved årsslutt
52	Ekstrabeløp	kr 1 836,33		1	2024	kr 20 000,00	kr 20 000,00	kr 20 700,00		1	2024	kr 20 000,00	kr 20 000,00	=G4*(1+\$B\$2)
53				2	2025	kr 21 836,33	kr 42 536,33	kr 44 025,10		2	2025	=F53+\$B\$52	=F54+H53	=G54*(1+\$B\$2)
54				3	2026	kr 23 672,66	kr 67 697,76	kr 70 067,18		3	2026	=F54+\$B\$52	=F55+H54	=G55*(1+\$B\$2)
55				4	2027	kr 25 508,99	kr 95 576,17	kr 98 921,34		4	2027	=F55+\$B\$52	=F56+H55	=G56*(1+\$B\$2)
56				5	2028	kr 27 345,32	kr 126 266,65	kr 130 685,99		5	2028	=F56+\$B\$52	=F57+H56	=G57*(1+\$B\$2)
57				6	2029	kr 29 181,65	kr 159 867,63	kr 165 463,00		6	2029	=F57+\$B\$52	=F58+H57	=G58*(1+\$B\$2)
58				7	2030	kr 31 017,98	kr 196 480,98	kr 203 357,81		7	2030	=F58+\$B\$52	=F59+H58	=G59*(1+\$B\$2)
59				8	2031	kr 32 854,31	kr 236 212,11	kr 244 479,54		8	2031	=F59+\$B\$52	=F60+H59	=G60*(1+\$B\$2)
60				9	2032	kr 34 690,63	kr 279 170,17	kr 288 941,13		9	2032	=F60+\$B\$52	=F61+H60	=G61*(1+\$B\$2)
61				10	2033	kr 36 526,96	kr 325 468,09	kr 336 859,48		10	2033	=F61+\$B\$52	=F62+H61	=G62*(1+\$B\$2)
62				11	2034	kr 38 363,29	kr 375 222,77	kr 388 355,57		11	2034	=F62+\$B\$52	=F63+H62	=G63*(1+\$B\$2)
63				12	2035	kr 40 199,62	kr 428 555,19	kr 443 554,62		12	2035	=F63+\$B\$52	=F64+H63	=G64*(1+\$B\$2)
64				13	2036	kr 42 035,95	kr 485 590,57	kr 502 586,24		13	2036	=F64+\$B\$52	=F65+H64	=G65*(1+\$B\$2)
65				14	2037	kr 43 872,28	kr 546 458,53	kr 565 584,57		14	2037	=F65+\$B\$52	=F66+H65	=G66*(1+\$B\$2)
66				15	2038	kr 45 708,61	kr 611 293,19	kr 632 688,45		15	2038	=F66+\$B\$52	=F67+H66	=G67*(1+\$B\$2)
67				16	2039	kr 47 544,94	kr 680 233,39	kr 704 041,56		16	2039	=F67+\$B\$52	=F68+H67	=G68*(1+\$B\$2)
68				17	2040	kr 49 381,27	kr 753 422,83	kr 779 792,62		17	2040	=F68+\$B\$52	=F69+H68	=G69*(1+\$B\$2)
69				18	2041	kr 51 217,60	kr 831 010,22	kr 860 095,58		18	2041	=F69+\$B\$52	=F70+H69	=G70*(1+\$B\$2)
70				19	2042	kr 53 053,93	kr 913 149,51	kr 945 109,74		19	2042	=F70+\$B\$52	=F71+H70	=G71*(1+\$B\$2)
71				20	2043	kr 54 890,26	kr 1 000 000,00	kr 1 035 000,00		20	2043	=F71+\$B\$52	=F72+H71	=G72*(1+\$B\$2)
72				21	2044	kr 56 726,59	kr 1 091 726,59	kr 1 129 937,02		21	2044	=F72+\$B\$52	=F73+H72	=G73*(1+\$B\$2)
73														
74														

Figur 8: Målsøking til oppgave 2-2c

Jeg brukte samme oppsett i Excel, men la til et ekstrabeløp i B52 som legges til hvert år. Jeg brukte målsøking til å sette celle G72 til 1 000 000 kr ved å endre celle B52.

Miriam må øke sparebeløpet med 1 836,33 kr hvert år.

Oppgave 2-3

En dekkprodusent påstår at bremselengden for en type vinterdekk under bestemte forhold er 83 meter.

La X være bremselengden ved en tilfeldig måling under disse forholdene. Gå ut fra at X er normalfordelt med $\mu = 83$ m og $\sigma = 3,0$ m.

- Bestem sannsynligheten for at bremselengden ved en tilfeldig valgt måling er lengre enn 87 meter.
- Bestem k slik at $P(X < k) = 0,9$. Gi en praktisk tolkning av svaret.
- Bestem sannsynligheten for at gjennomsnittet av 15 målinger er mindre enn 84 meter.

Noen mener at bremselengden er lengre enn 83 meter. De ville derfor gjennomføre en test under de samme bestemte forholdene, for å sjekke om det er hold i dekkprodusentens påstand.

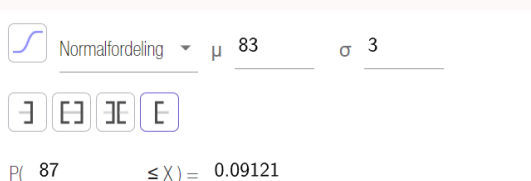
Det ble gjennomført 15 målinger. Resultatet av målingene (i meter) er gitt i tabellen nedenfor.

86,4	85,5	82,9	81,9	84,0
86,4	82,3	85,9	77,7	83,0
86,9	88,3	86,2	80,5	84,8

- d) Gjennomfør en hypotesetest med et signifikansnivå på 5 prosent til å avgjøre om det er hold i mistanken.

✓ Løsningsforslag

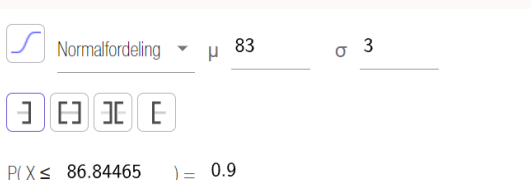
- a) Jeg bestemmer $P(X > 87)$ ved hjelp av sannsynlighetsvinduet i GeoGebra.



Figur 9: Sannsynlighet til oppgave 2-3a

Sannsynligheten for at bremselengden til en tilfeldig valgt bil er over 87 meter er 0,09121.

- b) Jeg brukte sannsynlighetsvinduet i GeoGebra. Der valgte jeg sannsynlighet for at $X < k$ og skrev inn 0,9 i sannsynlighetsfeltet.

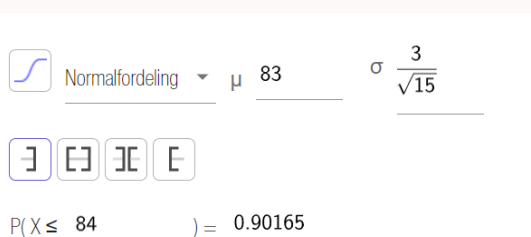


Figur 10: Sannsynlighet til oppgave 2-3b

$k = 86,84$. Det betyr at dekkprodusenten påstår at man klarer å stoppe innen 86,84 meter i 90 % av tilfellene.

- c) Jeg lar $\bar{X}$ være gjennomsnittet av 15 målinger. Da er $\bar{X}$ normalfordelt med $\mu = 83$ og $SD(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = 0,7746$.

Jeg bruker sannsynlighetsvinduet i GeoGebra til å bestemme sannsynligheten $P(\bar{X} < 84) = 0,90165 \approx 0,902$.



Figur 11: Sannsynlighet til oppgave 2-3c

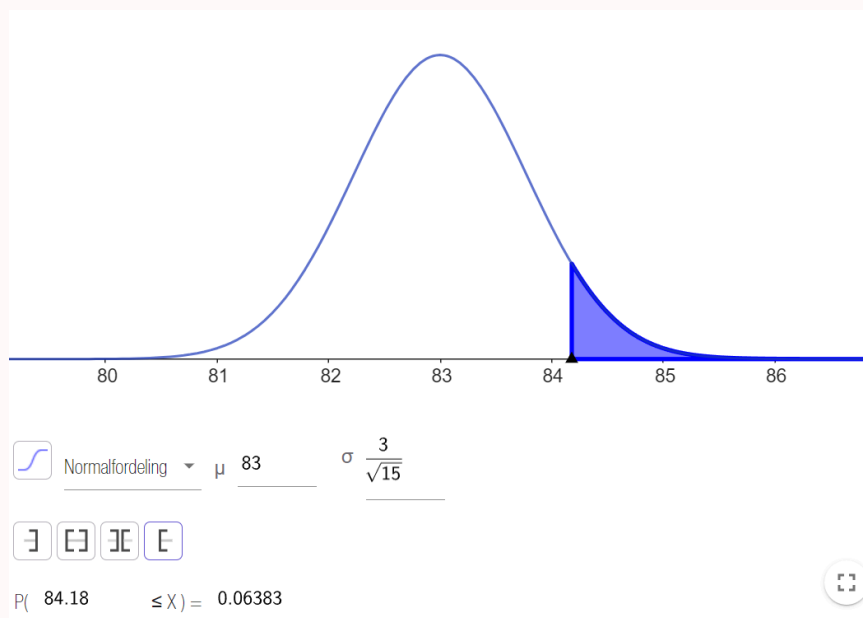
Sannsynligheten for at gjennomsnittet av 15 målinger er under 84 meter er 0,902.

d) Gjennomsnittet av observasjonene i tabellen i oppgaven er 84,18.

Jeg setter opp en hypotesetest hvor:

$$H_0 : \mu = 83 \quad H_A : \mu > 83$$

Gitt at nullhypotesen er sann så har vi normalfordeling med $E(\bar{X}) = 83$ og $SD(\bar{X}) = \frac{3}{\sqrt{15}}$.



Figur 12: Sannsynlighet til oppgave 2-3d

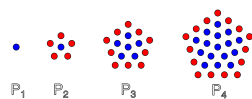
Som vi ser fra GeoGebra-utklippet er sannsynligheten så er sannsynligheten 0,064 for at vi får et utvalg med gjennomsnitt større eller lik 84,18. Vi kan dermed ikke forkaste nullhypotesen med signifikansnivået 0,05.

Vi kan ikke fastslå om bremselengden egentlig er lengre enn 83 meter med signifikansnivå 0,05.

Oppgave 2-4

Hver figur nedenfor består av kuler plassert på pentagoner. Antall kuler på hver av ytterkantene øker med én sammenlignet med antall kuler på ytterkanten i figuren før. La P_n være antall kuler i figur n .

De fem første figurtallene er 1, 6, 16, 31 og 51



Figurkilde: By HB - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=872244>

- Beskriv en rekursiv sammenheng mellom P_n og P_{n-1} .
- Lag et program som regner ut P_{1000} ved å bruke den rekursive sammenhengen du fant i oppgave a)

✓ Løsningsforslag

- a) Jeg ser at differansen mellom antall kuler i figurene øker med 5, 10, 15, 20. La oss kalle denne differansen for d . Vi kan si at $P_2 = P_1 + 5 = P_1 + d$ og $P_3 = P_2 + 2d$. Vi ser dermed et mønster og kan sette opp følgende sammenheng for $n \geq 2$:

$$P_n = P_{n-1} + (n-1) \cdot d$$

b)

```
1 a = 1
2 d = 5
3 n = 100
4
5 for i in range(2, n + 1):
6     a = a + d * (i-1)
7
8 print(f"Det er {a} kuler i figur {n}.")
```

Python

Programmet gir at $P_{100} = 24\,751$.

Oppgave 2-5

Høyden X til en tilfeldig valgt jente på 24 måneder er tilnærmet normalfordelt med forventningsverdi $E(X) = 87$ cm og standardavvik $SD(X) = 3,3$ cm.

Høyden Y til en tilfeldig valgt gutt på 24 måneder er tilnærmet normalfordelt med forventningsverdi $E(Y) = 88$ cm og standardavvik $SD(Y) = 3,1$ cm.

Lag et program som du kan bruke til å anslå sannsynligheten for at høyden til et tilfeldig valgt barn på 24 måneder er mindre enn 84 cm. Gå ut ifra at det er like mange jenter som gutter i populasjonen.

✓ Løsningsforslag

Jeg velger å gjøre oppgaven ved å simulere uttrekk i en populasjon på 10000.

```
1 import random
2
3 forventning_jente = 87
4 standardavvik_jente = 3.3
5 forventning_gutt = 88
6 standardavvik_gutt = 3.1
7
8 antall_gunstige = 0
9 N = 10000 # gjør 10000 trekk
10 grenseverdi = 84
11
12 for i in range(N):
13     # gjør det tilfeldig om vi trekker en jente eller gutt
14     tilfeldig_tall = random.randint(1,2)
15
16     if tilfeldig_tall == 1:
17         # trekker ei tilfeldig jente fra populasjonen
```

Python

```

18     hoyde = random.gauss(forventning_jente, standardavvik_jente)
19     else:
20         # trekker en tilfeldig gutt fra populasjonen
21         hoyde = random.gauss(forventning_gutt, standardavvik_gutt)
22
23     if hoyde < grenseverdi:
24         antall_gunstige += 1
25
26 sannsynlighet = antall_gunstige / N
27
28 print(f"Sannsynligheten for at barnet er mindre enn {grenseverdi} cm ved 24
    måneder er omtrent {sannsynlighet:.4f}.")

```

Sannsynligheten er omtrent 0,14 for at et tilfeldig valgt barn på 24 måneder er under 84 cm.