

S2 eksamen H2023

Oversikt

Del 1 — 2 timer — uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1	Bestemt integral 3	integral	✓
1-2a	Uendelig geometrisk rekke	uendelig rekke, rekker	✓
1-2b	Aritmetisk rekke	rekker	✓
1-3	Grensekostnader og enhetskostnader fra graf	grenseinntekt og grensekostnad, enhetskostnad, tolke grafer	✓
1-4	Ukjent program h23	programmering	✓
1-5	Tunge kuller i kasse	sannsynlighet, diskrete sannsynlighetsfordelinger, forventningsverdi, varians	✓

Del 2 — 3 timer — med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-1	Modell for etterspørsel av vare	etterspørsel, modellering, regresjon, grenseinntekt og grensekostnad	✓
2-2	Miriam og Hermods sparing	sparing, rekker	✓
2-3	Normalfordelte vinterdekk	normalfordeling, hypotesetest	✓
2-4	Rekursiv sammenheng mellom pentagontall	rekursiv sammenheng, programmering, rekker	✓
2-5	Simuler sannsynlighet for høyden til 24 måneder gammelt barn	programmering, simulering, normalfordeling	✓

Del 1

Oppgave 1-1

Regn ut integralet

$$\int_{-1}^1 (x^3 + 2x) dx$$

Hva forteller svaret deg?

Oppgave 1-2a

En uendelig geometrisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ konvergerer mot 8.

Bestem summen av de fire første leddene, når du får vite at $a_1 = 4$

Oppgave 1-2b

I en aritmetisk rekke er $a_1 + a_4 + a_7 = 114$.

Bestem a_4 .

Oppgave 1-3

I koordinatsystemet nedenfor ser du grafen til en kostnadsfunksjon K sammen med tre rette linjer.

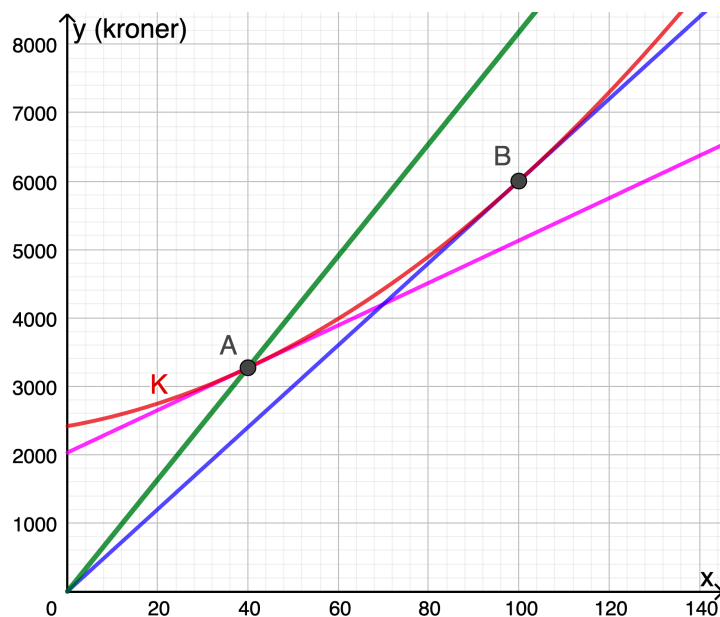
De tre rette linjene er grafene til funksjonene f , g , h der

$$f(x) = 31x + 2030$$

$$g(x) = 60x$$

$$h(x) = 81,75x$$

To av linjene tangerer grafen til K . Vi kaller tangeringspunktene A og B .



Figur 1: Kostnadsfunksjonen $K(x)$

- Bestem enhetskostnaden ved produksjon av 40 enheter.
- Forklar at grensekostnaden ved produksjon av 40 enheter er 31 kroner.
- Bestem den minste enhetskostnaden.

Oppgave 1-4

En elev har skrevet koden nedenfor

```
1 N = 1000
2 start = -2
3 slutt = 2
4 dx = (slutt - start)/N
5
6 def f(x):
7     return x**2-1
8
9 S = 0
10 for i in range(N):
11     xi = start + i*dx
12     S = S + abs(f(xi))*dx # abs(f(x)) gir absoluttverdien til f(x)
13
```

Python

- a) Forklar hva eleven ønsker å regne ut med denne koden.
- b) Finn ved regning den verdien eleven ønsker å bestemme.

Oppgave 1-5

I en kasse ligger det tre typer kuler. Disse veier henholdsvis 4 kg, 5 kg og 10 kg. Dersom vi trekker tilfeldig en kule, er sannsynligheten $\frac{1}{4}$ for at kulen veier 4 kg og $\frac{1}{2}$ for at den veier 5 kg.

- a) Vis at $E(X) = 6$ kg. Regn ut variansen til X .

Vi trekker tilfeldig en kule og legger den tilbake igjen. Dette gjør vi to ganger. La X_1 være vekten til den første kule vi trekker, og X_2 vekten til den andre kule vi trekker. La $Y = X_1 + X_2$.

- b) Sett opp sannsynlighetsfordelingen til Y .
- c) Bestem $P(Y > 10)$.

Del 2

Oppgave 2-1

Tabellen viser den daglige etterspørselen etter en vare for ulike priser.

Pris (kroner)	Etterspørsel
10	237
20	111
30	49
40	22
50	12

- a) Lag en modell q som kan brukes til å beskrive sammenhengen mellom prisen p (i kroner) og den daglige etterspørselen. Vurder gyldighetsområdet til modellen.
- b) Hva bør prisen for varen være dersom bedriften skal selge 70 enheter per dag?

For en annen vare viser det seg at $p = 79 - 12,2 \ln x$.

Her er x den daglige etterspørselen når varen koster p kroner.

- c) Hva må prisen være dersom inntektene skal bli størst mulig?

Kostnadene K (i kroner) ved produksjon og salg av x enheter per dag er gitt ved

$$K(x) = 0,021x^2 + 10x + 910$$

- d) Hvor mange enheter må produseres og selges per dag for at grenseinntektene skal bli lik grensekostnadene? Gi en praktisk tolkning av svaret

Oppgave 2-2

Miriam har bestemt seg for å sette inn 20 000 kroner på en konto i begynnelsen av hvert år. Det første sparebeløpet vil hun sette inn i begynnelsen av 2024, det andre beløpet i begynnelsen av 2025, og så videre. Anta at hun får en fast årlig rentesats på 3,5 prosent.

- a) Vis at Miriam vil ha 565 594 kroner på kontoen like etter at hun har satt inn innskudd nummer 20.

Hermod har også bestemt seg for å spare. Han vil sette inn et fast beløp i begynnelsen av hvert år. Det første sparebeløpet setter han inn i begynnelsen av 2024. Han får også en fast årlig rentesats på 3,5 prosent. Hermod har regnet ut at han vil ha 692 852 kroner på kontoen like etter at innskudd nummer 20 er satt inn.

- b) Bestem beløpet Hermod må sette inn hvert år for at dette skal stemme.

Miriam ønsker at det skal være 1 000 000 kroner på kontoen like etter at hun har satt inn innskudd nummer 20. For å få til dette, vil hun øke innskuddet med et fast beløp hvert år. Første innskudd skal være 20 000 kroner.

- c) Hvor mye må hun øke innskuddet med hvert år?

Oppgave 2-3

En dekkprodusent påstår at bremselengden for en type vinterdekk under bestemte forhold er 83 meter.

La X være bremselengden ved en tilfeldig måling under disse forholdene. Gå ut fra at X er normalfordelt med $\mu = 83$ m og $\sigma = 3,0$ m.

- Bestem sannsynligheten for at bremselengden ved en tilfeldig valgt måling er lengre enn 87 meter.
- Bestem k slik at $P(X < k) = 0,9$. Gi en praktisk tolkning av svaret.
- Bestem sannsynligheten for at gjennomsnittet av 15 målinger er mindre enn 84 meter.

Noen mener at bremselengden er lengre enn 83 meter. De ville derfor gjennomføre en test under de samme bestemte forholdene, for å sjekke om det er hold i dekkprodusentens påstand.

Det ble gjennomført 15 målinger. Resultatet av målingene (i meter) er gitt i tabellen nedenfor.

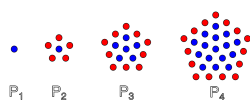
86,4	85,5	82,9	81,9	84,0
86,4	82,3	85,9	77,7	83,0
86,9	88,3	86,2	80,5	84,8

- d) Gjennomfør en hypotesetest med et signifikansnivå på 5 prosent til å avgjøre om det er hold i mistanken.

Oppgave 2-4

Hver figur nedenfor består av kuler plassert på pentagoner. Antall kuler på hver av ytterkantene øker med én sammenlignet med antall kuler på ytterkanten i figuren før. La P_n være antall kuler i figur n .

De fem første figurtallene er 1, 6, 16, 31 og 51



Figurkilde: By HB - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=872244>

- Beskriv en rekursiv sammenheng mellom P_n og P_{n-1} .
- Lag et program som regner ut P_{1000} ved å bruke den rekursive sammenhengen du fant i oppgave a)

Oppgave 2-5

Høyden X til en tilfeldig valgt jente på 24 måneder er tilnærmet normalfordelt med forventningsverdi $E(X) = 87$ cm og standardavvik $SD(X) = 3,3$ cm.

Høyden Y til en tilfeldig valgt gutt på 24 måneder er tilnærmet normalfordelt med forventningsverdi $E(Y) = 88$ cm og standardavvik $SD(Y) = 3,1$ cm.

Lag et program som du kan bruke til å anslå sannsynligheten for at høyden til et tilfeldig valgt barn på 24 måneder er mindre enn 84 cm. Gå ut ifra at det er like mange jenter som gutter i populasjonen.