

S2 eksamen H2025

Oversikt

Del 1 – 2 timer – uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1	Ubestemt integral S2 H2025	integral	✓
1-2	S2 H2025 ulike rek- ker del 1	rekker, uendelig rekke	✓
1-3	Tolkning av inte- gral og areal fra graf	tolke grafer, tolkning av inte- graler, integral, areal under graf	✓
1-4	Sannsyn- lighet for poengtap ved po- engspill	sannsynlighet, varians, forvent- ningsverdi, dis- krete sannsyn- lighetsfordelin- ger	✓
1-5	Finn rik- tig graf for nor- malforde- lingene	normalforde- ling, tolke grafer	✓

Del 2 – 3 timer – med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-1	Logistisk plante-salg	regresjon, logistisk funksjon, tolkning av integraler	✓
2-2	Grense-kostnader, enhetskostnader og overskudd	økonomi, grenseinntekt og grensekostnad, enhetskostnad	✓
2-3	Hypotesetester om komponenter som er defekte	hypotesetest	✓
2-4	Mathias sine lån for å kjøpe bil	lån, rekker	✓
2-5	Programmering av Wiggos spareplan	rekursiv sammenheng, programmering	✓
2-6	Simulering av antall terningkast for å få samme antall øyne i to kast på rad	simulering, sannsynlighet, programmering	✓

Del 1

Oppgave 1-1

Regn ut integralet

$$\int e^x \cdot x \, dx$$

✓ Løsningsforslag

Jeg ser at integranden er produktet av to funksjoner, og jeg velger derfor å bruke delvis integrasjon med DI-metoden.

	D	I
+	x	e^x
-	1	e^x
+	0	

$$\int e^x \cdot x \, dx = x \cdot e^x - 1 \cdot e^x + C = \underline{\underline{e^{x(x-1)} + C}}$$

Oppgave 1-2

Ta utgangspunkt i den aritmetiske rekken

$$-3 + 0 + 3 + \dots + 69$$

- a) Bestem summen av rekken.

Ta utgangspunkt i den uendelige geometriske rekken

$$5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \dots$$

- b) Bestem konvergensområdet til rekken.

En ball faller fra 2 meters høyde. Hver gang ballen treffer bakken, spretter den opp til en høyde som er 75% av høyden den falt fra.

- c) Hvor mange meter vil ballen bevege seg totalt?

✓ Løsningsforslag

- a) Vi kjenner $a_1 = -3$ og $a_n = 69$, men vi kjenner ikke n . Vi bruker derfor formelen for ledd i aritmetisk følge

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$69 = -3 + (n - 1) \cdot 3$$

$$\frac{69}{3} = \frac{-3 + (n - 1) \cdot 3}{3}$$

$$23 = -1 + (n - 1)$$

$$23 + 1 + 1 = n$$

$$n = 25$$

Summen av den aritmetisk rekka er dermed

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{-3 + 69}{2} \cdot 25 = \frac{66}{2} \cdot 25 = 33 \cdot 25 = \underline{\underline{825}}$$

- b) Konvergensområdet er de verdiene av x som tilfredsstiller $-1 < k(x) < 1$, der $k(x) = \frac{1}{2} - x$.

$$-1 < k(x) < 1$$

$$-1 < \frac{1}{2} - x < 1$$

$$1 > -\frac{1}{2} + x > -1$$

$$1 + \frac{1}{2} > -\frac{1}{2} + x + \frac{1}{2} > -1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} > x > -\frac{1}{2}$$

Konvergensområdet for rekka er $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$.

c) Ballen vil bevege seg på følgende måte:

- 2 m ned
- $2 \cdot 0,75 = 1,5$ m opp
- $2 \cdot 0,75 = 1,5$ m ned
- $1,5 \cdot 0,75 = 1,125$ m opp
- $1,5 \cdot 0,75 = 1,125$ m ned
- Og så videre ...

Ballens totale distanse kan altså modelleres ved hjelp av to geometriske rekker, a for distansen nedover, og b for distansen oppover. Vi har $k = 0,75$, samt startverdiene $a_1 = 2$ og $b_1 = 1,5$

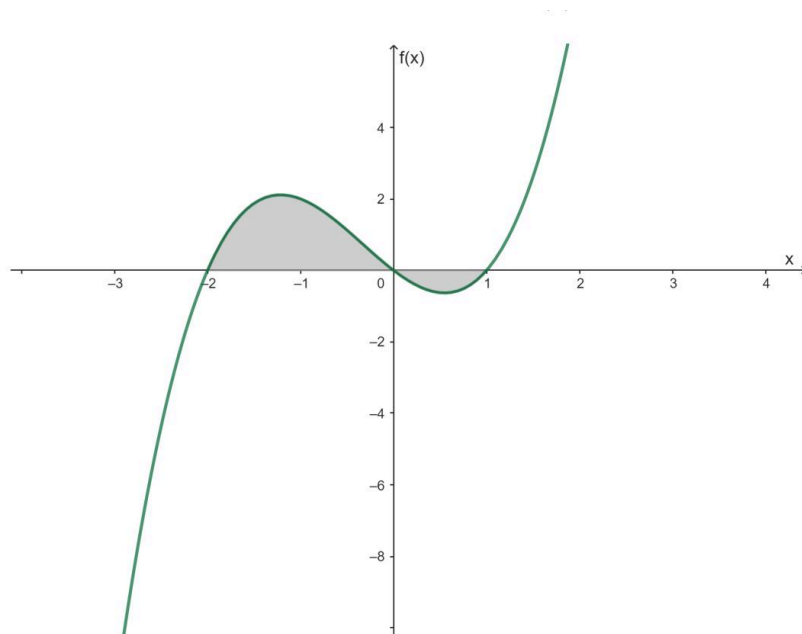
$$s_a = \frac{a_1}{1-k} = \frac{2}{1-\frac{3}{4}} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{8}{1} = 8$$

$$s_b = \frac{b_1}{1-k} = \frac{1,5}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1,5}{\frac{1}{4}} = \frac{1,5 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{6}{1} = 6$$

Ballen vil totalt bevege seg 14 meter.

Oppgave 1-3

Nedenfor ser du grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$.



Figur 1: Grafen til f

- a) Hvilket av uttrykkene nedenfor gir arealet av det markerte området på figuren? Husk å begrunne svaret ditt.

1. $\int_{-2}^1 f(x) \, dx$

2. $\int_{-2}^1 f(x) \, dx - \int_0^1 f(x) \, dx$

3. $\int_{-2}^0 f(x) \, dx + \int_0^1 f(x) \, dx$

4. $\int_{-2}^0 f(x) \, dx - \int_0^1 f(x) \, dx$

- b) Regn ut arealet av det markerte området på figuren.

Kristian ønsker å finne en verdi $a < 0$, som er slik at $\int_a^1 f(x) \, dx = 0$. Han bruker en kalkulator og finner at $a \approx -0,6$.

Unni påstår at likningen til Kristian har to løsninger.

- c) Forklar hvorfor påstanden til Unni er riktig, og bruk figuren til å anslå omtrent hvilken verdi den andre løsningen kan ha.

✓ Løsningsforslag

- a) Områder som ligger over x -aksen vil ha identisk areal og integral. Områder som ligger under x -aksen vil ha motsatt fortegn på integralet og arealet.

Vi deler derfor opp integrasjonen vår i to deler, en for området over x -aksen (fra $x = -2$ til $x = 0$), og en annen del for området under x -aksen (fra $x = 0$ til $x = 1$).

Området fra $x = -2$ til $x = 0$ ligger over x -aksen, arealet og integralet er identiske. Området fra $x = 0$ til $x = 1$ ligger under x -aksen, så arealet og integralet vil ha motsatt fortegn. For å beregne det samlede arealet må vi derfor endre fortegnet til integralet fra $x = 0$ til $x = 1$, altså

$$\int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$$

Uttrykk 4 gir arealet markert på figuren.

b) Jeg finner først det ubestemte integralet

$$F(x) = \int (x^3 + x^2 - 2x) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{2}x^2 + C$$

Arealet er gitt ved

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \\ &= [F(x)]_{-2}^0 - [F(x)]_0^1 \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-2}^0 - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^1 \\ &= \left((0) - \left(\frac{1}{4}(-2)^4 + \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)^2 \right) \right) - \left(\left(\frac{1}{4}1^4 + \frac{1}{3}1^3 - 1^2 \right) - (0) \right) \\ &= -\left(\frac{1}{4} \cdot 16 + \frac{1}{3} \cdot (-8) - 4 \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= -\left(\cancel{4} - \frac{8}{3} - \cancel{4} \right) - \left(\frac{3}{12} + \frac{4}{12} - \frac{12}{12} \right) \\ &= \frac{8}{3} - \left(-\frac{5}{12} \right) \\ &= \frac{32}{12} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

Arealet er $\frac{37}{12}$.

c) Likningen til Kristian er sann når vi velger a slik at vi får nøyaktig like store områder på oversiden og undersiden av x -aksen.

Fra figuren kan vi se at Kristians beregning ser riktig ut, området som er avgrenset av x -aksen og $f(x)$ fra $x = -0,6$ til $x = 1$ ser ut til å ha omtrent like mye areal over og under x -aksen.

Hvis vi tar $\int_{-2}^1 f(x) dx$ så må svaret bli positivt siden det er mer areal på oversiden av x -aksen.

Vi ser videre at $f(x)$ er negativ for $x < -2$, altså må det være mulig å velge en verdi for a som er mindre enn -2 slik at $\int_a^1 f(x) dx = 0$.

- Hvis vi velger $a = -2,5$ så ser det ut til at vi har litt mer areal over x -aksen enn under.
- Hvis vi velger $a = -3$ så ser det ut til at vi har litt mer areal under x -aksen enn over.

Likningen til Kristian krever like mye areal på oversiden og undersiden av x -aksen. Unni har rett i at det finnes to løsninger på likningen, der den andre løsningen ligger i intervallet $\langle -3, -2,5 \rangle$.

Oppgave 1-4

I et spill kan du få poeng ved å kaste en terning med fire sider. De fire sidene har ulik farge. Den ene siden er gul, den andre grønn, den tredje rød og den fjerde blå.

- Gul side gir ingen poeng.
- Grønn side gir ett poeng.
- Blå side gir to poeng.
- Rød side gir tre poeng.

Du starter med 10 poeng, og hvert kast koster 2 poeng.

La x være endringen i poeng for hvert kast, det vil si poengene fra kastet fratrasket de to poengene kastet koster.

a) Skriv av tabellen under og fyll inn det som mangler

x	□	-1	□	□
$P(X = x)$	□	$\frac{1}{4}$	□	□

b) Bestem $E(X)$. Hva forteller dette svaret?

c) Bestem $\text{Var}(X)$.

✓ Løsningsforslag

a) Jeg forutsetter at sannsynligheten er lik for alle fire sidene av terningen.

Farge	Gul	Grønn	Blå	Rød
x	-2	-1	0	1
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$x \cdot P(X = x)$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$(x - E(x))^2$	$\left(-\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$
$(x - E(X))^2 \cdot P(X = x)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$

b)
$$E(X) = \sum x \cdot P(X = x) = -\frac{2}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) + 0 + \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$E(X) = -\frac{1}{2}$. Det betyr at en spiller i gjennomsnitt vil tape 0,5 poeng per gang hen spiller i det lange løp.

c)
$$\text{Var}(X) = \sum (x - E(X))^2 \cdot P(X = x)$$

Jeg har regnet ut hvert kvadratavvik i tabellen over.

$$\text{Var}(X) = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

Variansen $\text{Var}(X) = \frac{5}{4}$.

Oppgave 1-5

På en skole med mange elever er høyden til elevene tilnærmet normalfordelt med en forventningsverdi på 170 cm og et standardavvik på 5 cm.

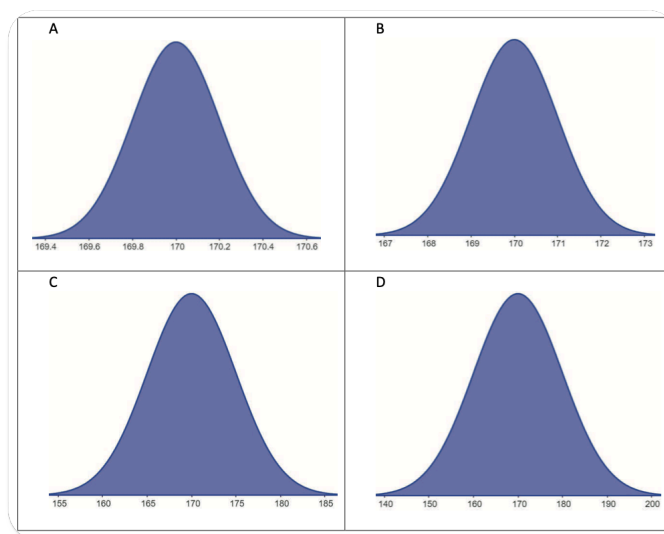
Vi trekker ut én tilfeldig elev fra skolen og måler hvor høy eleven er.

- a) Hvilken figur nedenfor viser sannsynlighetsfordelingen til denne hendelsen?

Vi trekker ut 25 tilfeldige elever fra skolen, måler hvor høye elevene er, og regner ut gjennomsnittshøyden.

- b) Hvilken figur nedenfor viser sannsynlighetsfordelingen til denne hendelsen?

Husk å begrunne svarene dine.



✓ Løsningsforslag

- a) Når standardavviket er 5 cm så skal ca. 68 % av sannsynligheten ligge innenfor intervallet $(165, 175)$ og normalfordelingsfunksjonen skal ha toppunktet sitt ved 170 cm. Vendepunktene til normalfordelingsfunksjonen skal også ligge ved $x = 165$ og $x = 175$.

Figurene A og B viser fordelinger med standardavvik som er svært mye lavere enn 5 cm. Figur D viser et standardavvik som er mye høyere enn 5 cm.

Figur C passer til beskrivelsen.

- b) Vi lar X være høyden til en tilfeldig valgt elev, og $\bar{X}$ være gjennomsnittshøyden til 25 tilfeldig valgte elever. Fra sentralgrensesetningen har vi at

$$E(\bar{X}) = E(X) = 170$$
$$SD(\bar{X}) = \frac{SD(X)}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

Vi ser at figur B har vendepunktene sine ved $x = 169$ og $x = 171$.

Figur B passer til beskrivelsen.

Del 2

Oppgave 2-1

Et hagesenter ønsker å satse på salg av en ny type planter. De startet salget av plantene i uke 17. Utover våren økte salget. I tabellen nedenfor ser du inntekten fra salget av plantene de første ukene.

Uke	17	18	19	20	21	22	23	24
Inntekt (kr/uke)	2900	4400	12 200	23 400	28 800	34600	41 000	40 800

- a) Bruk informasjonen i tabellen til å lage en modell I på formen

$$I(t) = \frac{B}{1 + a \cdot e^{-kt}}$$

for inntekten $I(t)$ kroner per uke, t uker etter uke 17. Vurder modellens gyldighetsområde.

- b) Når økte inntekten mest, ifølge modellen? Hvor mye økte inntekten med på dette tidspunktet?

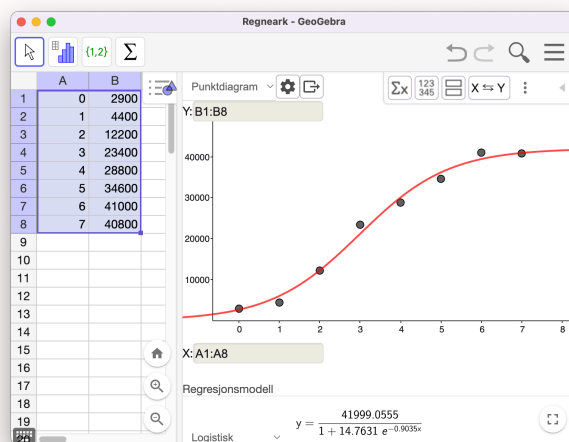
- c) Løs likningen

$$\int_0^x I(t) dt = 65000$$

Gi en praktisk tolkning av svaret.

✓ Løsningsforslag

a)



Figur 2: Regresjon i GeoGebra til oppgave 1 del 2

Jeg brukte regresjon i GeoGebra for å finne en logistisk modell som passer til uttrykket i oppgaveteksten. Den modellen som passer best er

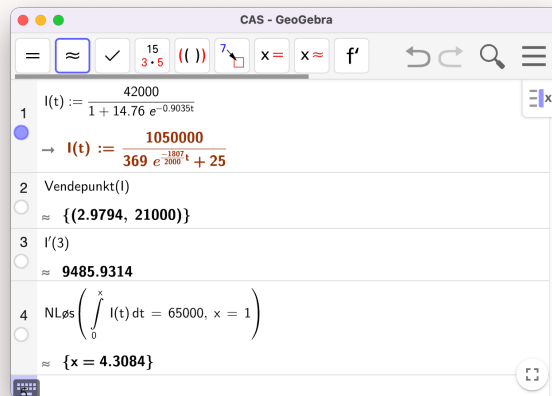
$$I(t) = \frac{42\,000}{1 + 14,76e^{-0,9035t}}$$

Salget starter i uke 17, så modellen er ikke gyldig før dette. I uke 24 så ser vi at salget minker noe fra uke 23, og det er naturlig med tanke på at uke 24 er starten av sommerferien.

Sannsynligvis selger man ikke like mye planter på sommeren som man gjør i vekstperioden på våren.

Jeg vurderer modellens gyldighetsområde til å kun være fra uke 17 til og med uke 24, altså $t \in [0, 7]$.

b)



Figur 3: CAS løsning av oppgave 1 del 2

Inntekten øker mest ved vendepunktet $t = 3$ (etter 20 uker), se linje 2 i utklippet. Den deriverte til $I(t)$ gir oss vekstfarten etter 20 uker i linje 3.

Inntektene vokser raskest i uke 20. De vokser da med omtrent 9486 kr per uke.

c) Se linje 4 i GeoGebra-utklippet. $x = 4,3$ tilsvarende underveis i uke 21.

De samlede salgsinntektene for planten passerte 65 000 kr i uke 21.

Oppgave 2-2

En bedrift produserer og selger en vare. Kostnaden $K(x)$ ved å produsere x enheter av varen per dag er gitt ved

$$K(x) = 700 \cdot e^{\frac{x}{200}}, \quad x \in \langle 0, 500 \rangle$$

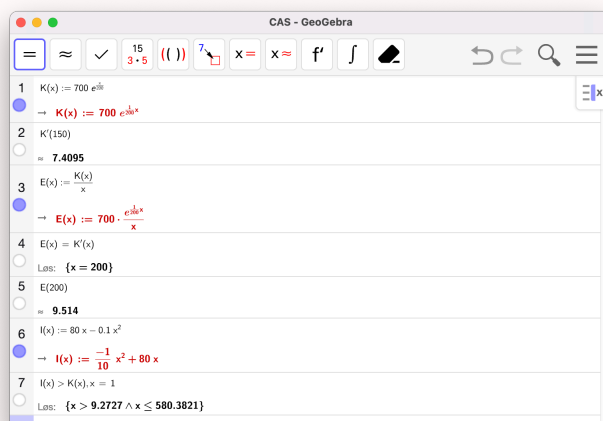
- Bestem $K'(150)$. Gi en praktisk tolkning av svaret.
- Bestem produksjonsmengden som gir den laveste enhetskostnaden. Hva blir denne enhetskostnaden?

Bedriften selger alle varene den produserer. Inntekten $I(x)$ kroner ved salg av x enheter av varen per dag er gitt ved

$$I(x) = 80x - 0,10x^2$$

- Hvor mange enheter av varen må bedriften produsere og selge for å gå med overskudd?

✓ Løsningsforslag



Figur 4: Løsning i CAS av oppgave 2 del 2

- a) Se linje 2 i utklippet.

Grensekostnaden $K'(150) = 7,41$. Kostnaden ved å øke produksjonen fra 150 enheter til 151 er omtrent 7,4 kroner.

- b) Enhetskostnadene er $E(x) = \frac{K(x)}{x}$. Vi har lavest enhetskostnad når $E(x) = K'(x)$. Jeg satt opp likningen i linje 4 i utklippet og regnet ut enhetskostnaden i linje 5.

Vi har lavest enhetskostnader ved produksjon av 200 enheter. Da er enhetskostnaden 9,51 kroner.

- c) Jeg løser ulikheten $I > K$ i linje 7. Siden definisjonsmengden til K er $D_K \in \langle 0, 500 \rangle$ så vil $I > K$ når $x \in [10, 500]$.

Bedriften må produsere og selge fra og med 10 enheter til og 500 enheter for å gå med overskudd.

Oppgave 2-3

En bedrift har en maskin som lager elektroniske komponenter. Firmaet MASK, som leverte maskinen til bedriften, oppgir at andelen feilproduserte komponenter vil være 1 % eller mindre.

Bedriften tester maskinen ved å lage 20 komponenter. Det viser seg at det er feil på én komponent. Bedriften klager til MASK og påstår at maskinen lager en høyere andel feilproduserte komponenter enn oppgitt.

- a) Bruk hypotesetesting og argumenter for om klagen er velbegrunnet.

MASK sender en kontrollør til bedriften. Kontrolløren tester mange komponenter fra maskinen og finner også feil på én komponent. Kontrolløren påstår at med det antallet komponenter han har testet, så er det mer enn 95 % sannsynlighet for at andelen feilproduserte komponenter er 1 % eller mindre.

- b) Hva er det minste antallet komponenter kontrolløren kan ha testet for å påstå dette?

✓ **Løsningsforslag**

- a) Vi lar p være sannsynligheten for at en tilfeldig valgt komponent er defekt. Bedriften som klager påstår at $p > 0,01$. Hypotesene våre er

$$H_0 : p \leq 0,01$$

$$H_A : p > 0,01$$



Figur 5: Binomisk hypotesetest til oppgave 3a del 2

Vi lar X være antallet defekte komponenter når vi produserer 20 komponenter gitt at nullhypotesen vår er sann. Fra sannsynlighetsvinduet i GeoGebra har vi at

$$P(X \geq 1) = 0,1821$$

Sannsynligheten for å finne 1 eller flere defekte komponenter gitt at nullhypotesen er sann er omtrent 18,21 %.

p -verdien er 0,1821. Det er ikke grunnlag for forkaste nullhypotesen om at andelen er 1 % eller lavere. Klagen fra bedriften er ikke velbegrunnet.

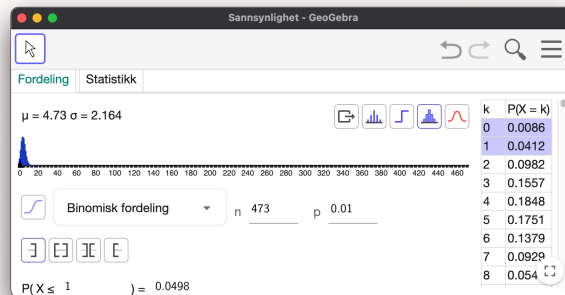
b)

🔥 **Usikker løsning**

Jeg klarer ikke forstå hva oppgaven spør etter. Jeg er ikke sikker på at dette er riktig løsning.

Nullhypotesen er fremdeles $H_0 : p \leq 0.01$.

Kontrolløren har kontrollert n komponenter. Det skal maksimalt være 5 % sannsynlighet for at han «var så heldig» at han bare fant 0 eller 1 defekt komponent. Vi skal altså finne den minste verdi for n som gjør at $P(X \leq 1) < 0,05$, gitt at $p = 0,01$.



Figur 6: Binomisk hypotesetest til oppgave 3b del 2

Ved å endre på n finner jeg fort ut at

- Ved $n = 472$ så er $P(X \leq 1) = 0,0502$
- Ved $n = 473$ så er $P(X \leq 1) = 0,0498$

Hvis kontrolløren kontrollerte 473 komponenter, så er sannsynligheten for å kun finne 0 eller 1 defekte komponenter 4,98 %.

Kontrolløren må minst ha kontrollert 473 komponenter.

Oppgave 2-4

Mathias ønsker å kjøpe seg en bil. Han går innom nærmeste bilforhandler, der han ser to ulike biler som vekker interesse.

Mathias har ingen egenkapital og må derfor låne hele beløpet. Bilforretningen gir Mathias følgende to tilbud for bilene:

Tilbud 1: Diesebil

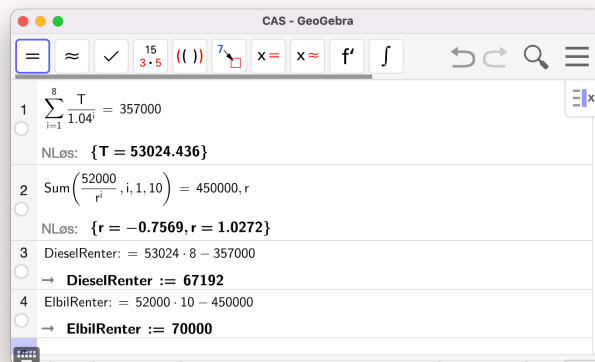
En brukt diesebil. Pris 357 000 kroner. Nedbetalingstid 8 år, med én termin per år. Første innbetaling etter ett år. Rentesats 4 %.

Tilbud 2: Elbil

En ny elbil. Pris 450 000 kroner. Nedbetalingstid 10 år, med én termin per år og terminbeløp på 52 000 kroner. Første innbetaling etter ett år.

- Sett opp en geometrisk rekke som viser hvor mye Mathias må betale for den brukte diesebilen. Bruk rekken til å bestemme terminbeløpene Mathias må betale dersom han kjøper bilen.
- Bestem rentesatsen Mathias får dersom han velger å kjøpe elbilen.
- Hvilket tilbud fører til at Mathias må betale mest renter totalt?

✓ Løsningsforslag



Figur 7: Løsning av oppgave 4 del 2 i CAS

- a) Et annuitetslån passer godt til oppgaven siden den spør etter en geometrisk rekke som viser hvor mye Mathias må betale.

I et annuitetslån må summen av nåverdier til terminbeløpene tilsvare lånebeløpet, altså

$$\sum_{i=1}^8 \frac{T}{1,04^i} = 357\,000$$

Jeg løser denne i CAS (se linje 1).

Terminbeløpene er 53 024 kr.

- b) Siden det er fast terminbeløp på 52 000 kr, så vil også dette lånet være et annuitetslån.

Jeg setter opp likningen i CAS og løser (se linje 2). Vekstfaktoren er 1,0272 (vi ser bort fra den negative løsningen da vekstfaktorer alltid er positive), dette gir 2,72 % rente.

Rentesatsen er 2,72 %.

- c) Rentekostnadene er summen av terminbeløpene minus prisen på bilene. Disse har jeg beregnet i linje 3 og 4 i utklippet.

Å kjøpe elbilen vil gi høyest rentekostnader totalt, men det er først og fremst på grunn av at elbilen er dyrere og nedbetalingstiden er lengre. Rentesatsen er lavest for elbilen.

Oppgave 2-5

Wiggo har en spareplan. De fem første dagene sparer han følgende beløp:

- Dag 1: 1 krone
- Dag 2: 5 kroner
- Dag 3: 10 kroner
- Dag 4: 16 kroner
- Dag 5: 23 kroner

Etter disse fem dagene har han 55 kroner på konto. Wiggo ønsker å fortsette med denne sparingen i samme mønster i dagene framover.

Beskriv den rekursive sammenhengen mellom sparebeløpene. Lag et program som bruker denne rekursive sammenhengen til å vise hvor mange dager Wiggo må spare før han har 100000 kroner på konto.

Husk å legge ved skjermbilde av både programkoden og resultatet du får når du kjører programmet.

✓ Løsningsforslag

Den rekursive sammenhengen kan skrive matematisk som $B_{n+1} = B_n + 3 + n$, der $n \geq 1$ og $B_1 = 1$.

Vi kan også beskrive sammenhengen som at sparingen starter på 1 krone og at sparingen øker med 4 kroner til dag 2. Deretter øker sparingen med 1 krone mer per dag. Jeg velger å bruke dette mønsteret til programmeringen.

```

1 sparing = 1           # daglig sparebeløp i starten
2 økning = 4           # den første økningen
3 sum_spart = sparing   # sum på sparekontoen
4 dag = 1              # dag nummer
5
6 while sum_spart < 100_000:
7     dag = dag + 1     # ny dag
8     sparing = sparing + økning    # nytt sparebeløp
9     sum_spart = sum_spart + sparing    # setter inn beløpet på konto
10    økning = økning + 1    # beregner økningen til neste dag
11
12 print(f"Etter {dag} dager har Wiggo spart over 100 000 kr. Han har da spart {sum_spart} kr.")

```

Output: Etter 82 dager har Wiggo spart over 100 000 kr. Han har da spart 101926 kr.

Oppgave 2-6

Ane har en vanlig sekssidet terning. Hun ønsker å finne ut hvor mange ganger hun i gjennomsnitt må kaste terningen for å få det samme antallet øyne i to kast på rad.

Hun har laget tabellen nedenfor.

Kast nummer	1	2	3	4	5	6	...
Sannsynlighet for at kastet er nødvendig	1	1	$\frac{5}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$	...

Tabell 7: Sannsynlighet for at et kast er nødvendig

a) Forklar at

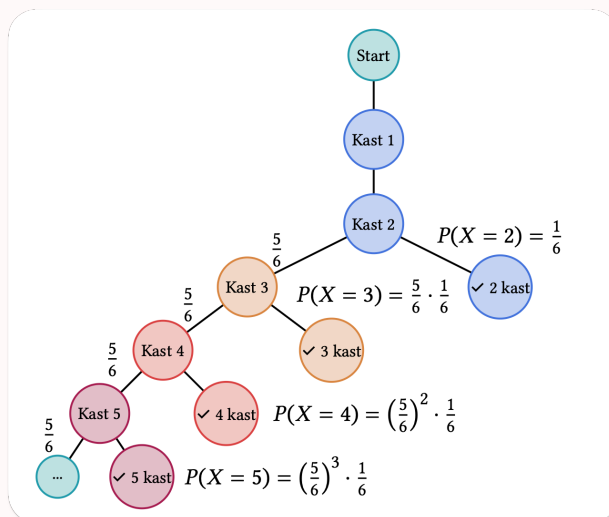
$$1 + 1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots$$

vil gi det forventede antallet kast Ane må gjøre for å få det samme antallet øyne i to kast på rad. Bestem denne verdien.

b) Bruk simulering til å bestemme forventningsverdien til summen av antall øyne Ane vil få på terningen i kastene hun bruker for å få det samme antallet øyne i to kast på rad.

✓ **Løsningsforslag**

- a) I denne oppgaven er jeg veldig usikker på hva som kreves for å forklare at uttrykket i oppgaveteksten er det samme som forventningsverdien. Jeg tror ikke det er meningen at elever skal gjøre det samme som jeg har gjort her – men jeg klarer ikke helt å se en enklere måte å argumentere for at forventningsverdien er eksakt lik summen av «antall kast nødvendig».



Figur 8: Valgtre til oppgave 6 del 2

Vi lar X være antall kast som trengs før vi har fått 2 like terningkast på rad. Sannsynligheten for å at et terningkast har samme antall øyne som det forrige er $1/6$, og sannsynligheten for at antall øyne er ulikt er $5/6$. Vi kan bruke multiplikasjonsprinsippet og sette opp følgende sannsynlighetsfordeling for X :

x_i	$P(x_i)$
1	0
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
4	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$
5	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$

Forventningsverdien til X vil da være

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i) \\
 &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \dots \\
 &= \frac{1}{6} \left(2\left(\frac{5}{6}\right)^0 + 3\left(\frac{5}{6}\right)^1 + 4\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Vi kaller alt inni parentesen for S , og omskriver heltallene som står foran $\frac{5}{6}$ som en sum av enere:

$$S = \underbrace{(1+1)}_2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 + \underbrace{(1+1+1)}_3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \underbrace{(1+1+1+1)}_4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots$$

Vi deler nå opp denne summen i en rekke delsummer slik at $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_1 + S_2 + \dots + S_n$ hvor

$$S_1 = 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 + 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

$$S_2 = 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 + 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

$$S_3 = 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$$

$$S_4 = 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \dots = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{1}{6}} = 6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$S_5 = 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \dots = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^3}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^3}{\frac{1}{6}} = 6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

Forventningsverdien er altså

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{6}S \\ &= \frac{1}{6}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + \dots) \\ &= \frac{1}{6}\left(6 + 6 + 5 + 6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots\right) \\ &= 1 + 1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Hvis vi ser bort fra det aller første leddet (1), så er dette en uendelig geometrisk rekke med $a_1 = 1$ og $k = \frac{5}{6}$

$$s = 1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots$$

Vi kan finne summen av rekka s med GeoGebra, eller med formelen for sum av uendelig geometrisk rekke:

$$s = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{1 \cdot 6}{\frac{1}{6} \cdot 6} = 6$$

Til sammen blir altså $E(X) = 1 + s = 1 + 6 = 7$.

Verdien av rekka er 7.

- b) Vi skal simulere *forventningsverdien til summen av antall øyne på alle terningene* som kastes i jakten på å få to like kast på rad.

```
1 from random import randint
2 N = 100_000
3 sum_øyne = 0 # totalt antall øyne på terningene
4
5 for i in range(N):
6     t1 = randint(1,6) # terningkast 1
7     t2 = randint(1,6) # terningkast 2
8
9     sum_øyne = sum_øyne + t1 + t2 # legger til resultatene til summen
10    while t1 != t2:
11        t1 = t2 # flytter t2's verdi til t1
12        t2 = randint(1,6) # ruller t2 på nytt
13        sum_øyne = sum_øyne + t2 # legger til nytt resultat til
14        summen
15
16 EX = sum_øyne/N # forventningsverdi = snitt i det
17 lange løp
18 print(f"Jeg estimerer forventningsverdien til å være {EX:.3f} etter {N}
19 simuleringer.")
```

Output: Jeg estimerer forventningsverdien til å være 24.502 etter 100000 simuleringer.

Etter å ha kjørt programmet flere ganger ser det ut til estimatet mitt er stabilt på rundt 24,5. Det stemmer også godt med at forventningsverdien for en terning er 3,5 og vi trenger i snitt 7 kast før vi har fått to like på rad.

Jeg estimerer forventningsverdien til summen av antall øyne før Ane får to like terninger på rad til å være 24,5.