

S2 eksamen V2024

Oversikt

Del 1 – 2 timer – uten hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
1-1	Bestemt integral og areal	integral, areal under graf	✓
1-2	Ubestemt integral v24	integral	✓
1-3	Ukjent program S2 v24	programmering, rekker	✓
1-4	Normalfordelt laks	standard normalfordeling, normalfordeling	✓
1-5	Vis at enhetskostnad er like grensekostnad ved laveste enhetskostnad	bevis, enhetskostnad, grenseinntekt og grensekostnad, økonomi	✓
1-6	Hildes terningkast	forventningsverdi, normalfordeling, standard normalfordeling, utforskning	✓

Del 2 – 3 timer – med hjelpemidler

Oppgave	Navn	Temaer	Løsningsforslag
2-1	Logistisk vekst for et produkt	økonomi, logistisk funksjon, samlet mengde	✓
2-2	Hypotesetest om legemiddel	hypotesetest, binomisk	✓
2-3	Olivias annuitetslån	lån, rekker, excel, cas	✓
2-4	Kubikk-tall	rekursiv sammenheng, figurtall, programmering	✓
2-5	Sveins kurv med baller	sannsynlighet, hypergeometrisk, utforskning	✓

Del 1

Oppgave 1-1

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = -x^3 + 3x$$

a) Regn ut integralet

$$\int_{-1}^0 f(x) dx$$

b) Bestem arealet av området som er avgrenset av grafen til f , x -aksen og linjene $x = -1$ og $x = 1$

✓ Løsningsforslag

a)

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^0 (-x^3 + 3x) dx \\
 & \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 \\
 & 0 - \left(-\frac{1}{4}(-1)^4 + \frac{3}{2}(-1)^2 \right) \\
 & -\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right) = -\frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

Integralet er $-\frac{5}{4}$.

b) Jeg finner først nullpunktene ved å faktorisere uttrykket.

$$f(x) = -x^3 + 3x = -x(x^2 - 3) = -x(x^2 - (\sqrt{3})^2) = -x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

Vi har nullpunkter når $f(x) = 0$. Det vil si at vi har nullpunkter når $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$. Det er kun nullpunktet $x = 0$ som ligger mellom $x = -1$ og $x = 1$.

For å finne ut om funksjonen er positiv eller negativ i intervallene så sjekker jeg funksjonsverdien i $x = -1$ og $x = 1$.

$$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) = 1 - 3 = -2$$

$$f(1) = -(1)^3 + 3 \cdot 1 = -1 + 3 = 2$$

>[!tip]- Alternativ måte å sjekke hvor funksjonen er positiv og negativ > >Siden integralet $\int_{-1}^0 f(x) dx < 0$ og det ikke finnes noen nullpunkter for $x \in \langle -1, 0 \rangle$, så må f være negativ når $x \in \langle -1, 0 \rangle$

f er altså negativ i intervallet $[-1, 0]$ og positiv i intervallet $[0, 1]$. Vi finner arealet ved å ta integralene av hver del (og husker minustegn foran integralet til området som ligger under x -aksen).

$$A = - \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

$$A = -\left(-\frac{5}{4}\right) + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$

$$A = \frac{5}{4} + -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Arealet av området er $\underline{\underline{\frac{5}{2}}}$.



Antisymmetri

Du kan utnytte antisymmetrien til f til å argumentere for at arealet avgrenset av $x = -1$, f , x -aksen og $x = 0$ vil være like stort som arealet avgrenset av f , x -aksen, $x = 0$ og $x = 1$.

Oppgave 1-2

Regn ut integralet

$$\int (x^2 + 1)^3 \cdot 2x dx$$



Løsningsforslag

Jeg ser at hvis jeg velger $u = x^2 + 1$ og bruker variabelskifte, så kan jeg forkorte bort $2x$ -faktoren senere.

$$\int (x^2 + 1)^3 \cdot 2x \, dx = \int u \cdot 2x \, dx$$

$$u = x^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

Jeg erstatter dx i det opprinnelige integralet med $\frac{du}{2x}$

$$\int u^3 \cdot 2x \, dx = \int u^3 \cdot \cancel{2x} \frac{du}{\cancel{2x}} = \int u^3 \, du = \frac{1}{4}u^4 + C = \underline{\underline{\frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + C}}$$

Oppgave 1-3

En elev har laget programmet under.

```
1 n = 0
2 S = 0
3
4 while S <= 200:
5     n = n + 1
6     S = S + 4*n - 2
7
8 print(n)
```

 Python

- Forklar hva eleven prøver å finne ut.
- Finn verdien eleven får skrevet ut når programmet kjøres.

✓ Løsningsforslag

- Programmet viser en aritmetisk følge hvor hvert ledd er gitt av $a_n = 4n - 2$ for $n > 0$. Programmet regner ut delsummene, S_n , til den tilhørende rekka.

Programmet finner ut hvilket ledd i rekka som gjør at delsummen blir over 200.

- Siden tallfølgen er aritmetisk kan vi regne ut summen av de n første leddene med

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$$

Jeg vet at summen skal være over 200, at $a_1 = 2$ og jeg kan erstatte a_n med $4n - 2$. Dette gir

$$200 = \frac{2 + 4n - 2}{2}n$$

$$200 = 2n^2$$

$$100 = n^2$$

$$10 = n$$

$n = 10$ gir oss altså nøyaktig delsummen $S_{10} = 200$. $n = 11$ gir oss den første delsummen som er over 200.

Oppgave 1-4

Hos en lakseoppdretter er slaktevekten til laksen normalfordelt med forventningsverdi 4700 gram. Det viser seg at 11,5 % av laksen som slaktes, veier mer enn 5300 gram.

- a) Vis at standardavviket for vekten til en vilkårlig laks er omtrent 500 gram.
- b) Bestem sannsynligheten for at en vilkårlig laks veier mindre enn 4500 gram

✓ Løsningsforslag

- a) La X være vekten til en tilfeldig valgt fisk. Da er forventningsverdien $E(X) = 4700$.

Vi vet at 88,5 % av fisken som slaktes veier mindre eller lik 5300 gram. Ifølge normalfordelingstabellen så er $0,885 = \Phi(1,2) \implies z = 1,2$.

Vi kan da sette opp likningen

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Leftrightarrow 1,2 = \frac{5300 - 4700}{\sigma} \Leftrightarrow \sigma = \frac{600}{1,2} = 500$$

Standardavviket for en vilkårlig valgt laks er 500 gram.

- b) Vi gjør om til standard normalfordeling

$$z = \frac{4500 - 4700}{500} = -\frac{200}{500} = -0,4$$

Normalfordelingstabellen gir oss $\Phi(-0,4) = 0,345$.

Sannsynligheten for at en vilkårlig valgt laks veier mindre enn 4500 gram er 34,5 %.

Oppgave 1-5

La $K(x)$ være kostnadsfunksjonen til en bedrift som produserer x enheter av en vare, og la $E(x)$ være enhetskostnaden. La x_0 være antallet enheter som gir den laveste enhetskostnaden. Vis at grensekostnaden er lik enhetskostnaden for $x = x_0$.

✓ Løsningsforslag

Vi har de laveste enhetskostnadene når $E'(x) = 0$. Vi kan altså sette opp

$$\begin{aligned} E'(x) &= 0 \\ \left(\frac{K(x)}{x} \right)' &= 0 \\ \frac{K'(x) \cdot x - K(x) \cdot 1}{x^2} &= 0 \\ K'(x) \cdot x - K(x) &= 0 \\ K'(x) &= \frac{K(x)}{x} \\ K'(x) &= E(x) \end{aligned}$$

Hvis x_0 er antallet enheter som gir lavest enhetskostnader så ser vi at dette må være lik grensekostnaden, altså $K'(x_0) = E(x_0)$.

Oppgave 1-6

Hilde kaster en terning med seks sider. La X være antall øyne hun får på terningen.

- a) Bestem forventningsverdien $E(X)$

Hilde regner ut at standardavviket $SD(X) = 1,7$. Hun vil kaste terningen flere ganger og summere antall øyne fra hvert kast.

- b) Hvor mange ganger må Hilde kaste terningen før det er omtrent 32 % sannsynlighet for at summen av antall øyne er mer enn 17 unna forventningsverdien for summen?

✓ Løsningsforslag

- a) For å finne forventningsverdien lager jeg en tabell og regner ut $\sum_{i=1}^6 x \cdot P(X = x)$

x	$P(X = x)$	$x \cdot P(X = x)$
1	$\frac{1}{6}$	$1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	$5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{6}$
Sum	1	$\frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$

Forventningsverdien er 3,5.

- b) Standardavviket til ett kast er $SD(X) = 1,7$.

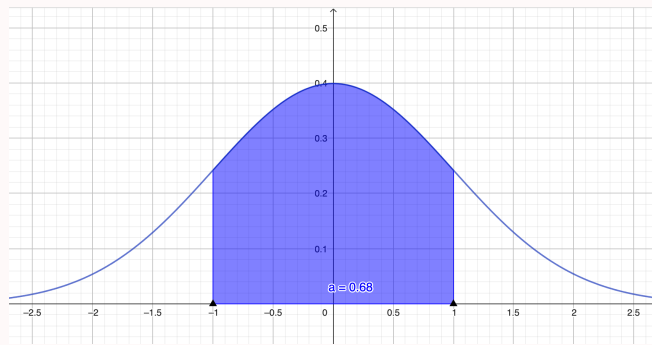
Vi lar S være summen av n forsøk med X slik at

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

Sentralgrensesetningen sier at S vil være tilnærmet normalfordelt med variansen og standardavviket:

$$\text{Var}(S) = n \cdot \text{Var}(X) \implies SD(S) = \sqrt{n} \cdot SD(X)$$

Fra normalfordelingstabellen så kan jeg finne ut at 68 % av arealet under normalfordelingskurven ligger innenfor pluss/minus ett standardavvik fra forventningsverdien. Altså må det være 32 % sannsynlighet for å få observasjon *mer enn* ett standardavvik fra forventningsverdien.



Siden vi vet at 32 % tilsvarer mer enn ett standardavvik fra forventningsverdien, må 17 øyne være ett standardavvik.

$$SD(S) = 17$$

$$\sqrt{n} \cdot SD(X) = 17$$

$$\sqrt{n} \cdot 1,7 = 17$$

$$\sqrt{n} = 10$$

$$n = 100$$

Hilde må kaste terningen 100 ganger før det er omtrent 32 % sannsynlighet for at summen av antall øyne er mer enn 17 unna forventningsverdien for summen.

Del 2

Oppgave 2-1

For et år siden begynte en butikk å selge et nytt produkt. Funksjonen f gitt ved

$$f(t) = \frac{700}{1 + 20e^{-0,12t}}$$

er en god modell for antallet enheter butikken har solgt av produktet per uke, t uker etter at produktet kom i salg.

- Når økte slaget raskest, ifølge modellen, og hvor mye økte salget da?
- Hvor lang tid gikk det før det samlede salget passerte 2000 enheter, ifølge modellen?

Inntekten fra salget av produktet har vært 1 000 000 kroner det første året.

- Hvilken pris har butikken solgt produktet for?

✓ Løsningsforslag

1	$f(t) := \frac{700}{1 + 20 e^{-0.12t}}$ $\rightarrow f(t) := \frac{700}{20 e^{\frac{-3}{25}t} + 1}$
2	Vendepunkt(f) $\approx \{(24.96444, 350)\}$
3	$f'(25)$ ≈ 20.9999
4	NLøs $\left(\int_0^x f \, dx = 2000, x \right)$ Punktliste: $\{(18.83788, 0)\}$
5	NLøs $\left(\int_0^{52} f \, dx \, p = 1000000, p \right)$ Punktliste: $\{(53.01258, 0)\}$

Figur 1: CAS-utklipp til oppgave 2-1

- a) Jeg ser at funksjonen er logistisk og jeg vet at den største vekstfarten er i vendepunktet.

Jeg finner vendepunktet i GeoGebra, se linje 2 i utklippet, vendepunktet er ved 25 enheter solgt. Vekstfarten ved 25 solgte enheter finner jeg ved å bestemme $f'(25)$ i linje 3.

Salget økte raskest i uke 25, da økte salget med 21 enheter per uke.

- b) Vi kan finne det samlede salget ved å bestemme arealet under grafen til f .

I linje 4 setter jeg opp likningen

$$\int_0^x f(t) \, dt = 2000$$

Det tok nesten 19 uker før salget passerte 2000 enheter.

- c) Inntektene fra salget må være gitt ved antall enheter solgt $\times$ pris per enhet.

I linje 5 setter jeg opp likningen

$$\int_0^{52} f(t) \, dt \cdot p = 1\,000\,000$$

der p er den ukjente prisen per enhet.

Butikken har solgt produktet for 53 kr.

Oppgave 2-2

Et smertestillende legemiddel, A, er tilgjengelig på markedet. Legemiddelet demper smerte for mange pasienter, men ikke for alle.

- Sannsynligheten for at legemiddel A virker på en pasient, er 75 %.
- Vi tester legemiddel A på n pasienter.
- Legemiddel A virker på X av disse pasientene.

- a) Hvilken sannsynlighetsfordeling har X ? Begrunn svaret ditt.

Regn ut $P(X = 9)$ når $n = 12$.

Et nytt legemiddel, B, skal også dempe smerte hos pasienter.

- Legemiddel B er testet ut på 10 pasienter.
- Legemiddel B virket på 9 av disse 10 pasientene.

b) La p være sannsynligheten for at B virker på en pasient. Gjennomfør en hypotesetest med signifikansnivå på 5 %. Bruk denne til å vurdere om du kan si at legemiddel B virker med høyere sannsynlighet enn A.

Legemiddel B blir gitt til 200 pasienter.

c) Hvor mange pasienter må legemiddel B minst virke på for at vi skal kunne konkludere med at legemiddel B virker med høyere sannsynlighet enn legemiddel A? Bruk et signifikansnivå på 5 %.

✓ Løsningsforslag

a) X er binomisk fordelt fordi

- Vi har n delforsøk
- Sannsynligheten for at legemiddelet fungerer er $p = 0,75$ i alle forsøkene
- Vi må anta at vi tester legemiddelet på tilfeldige pasienter slik at delforsøkene blir uavhengige.

Jeg bruker GeoGebras sannsynlighetskalkulator til å bestemme $P(X = 9)$.

Binomisk fordeling $n = 12$ $p = 0.75$

$P(9 \leq X \leq 9) = 0.2581$

Figur 2: Utklipp til oppgave 2-2a

$$P(X = 9) = \underline{\underline{0,258}}$$

💡 Utregning med formel for binomisk

Du kan også finne denne punktsannsynligheten enkelt med formelen for binomisk sannsynlighetsfordeling

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot 1 - p^{n-k}$$

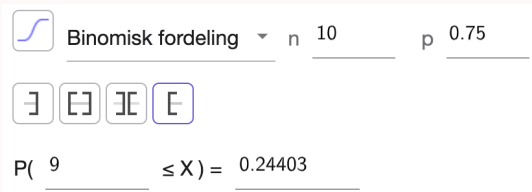
$$P(X = 9) = \binom{12}{9} \cdot 0,75^9 \cdot 0,25^3 = 0,2581$$

b) Nullhypotesen vår er at begge legemidlene er like effektive, mens den alternative hypotesen er at legemiddel B er bedre.

$$H_0 : p = 0,75$$

$$H_A : p > 0,75$$

Jeg finner sannsynligheten for at legemiddel B skal ha fungert på 9 av 10 pasienter gitt at H_0 er sann ved hjelp av GeoGebra.



Figur 3: Utklipp til oppgave 2-2b

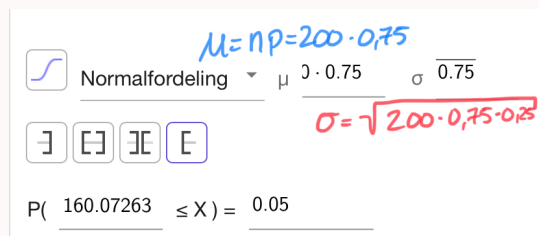
p -verdien er 0,244, dette er større enn signifikansnivået 0,05. Vi kan ikke forkaste H_0 , og vi kan dermed ikke si at legemiddel B fungerer bedre enn legemiddel A.

c) **Oppgaven kan også løses med binomisk fordeling**

Denne oppgaven lar seg fint løse i GeoGebra ved å prøve seg fram med binomisk fordeling. Av gammel vane har jeg valgt å bruke normalfordeling som en tilnærming til den binomiske. Dette gir meg også mulighet til å skrive inn signifikansnivået 0,05 i svarfeltet i sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.

Siden $\text{Var}(X)$ er høy så er normalfordelingen en veldig god tilnærming, og vi får samme svar uansett hvilken fordeling vi velger.

Jeg lar Y være antallet pasienter som legemiddel B fungerer for av de 200 pasientene. Y er tilnærmet normalfordelt siden $(\text{Var}(Y) = 200 \cdot 0,75 \cdot 0,25) \gg 5$.



Figur 4: Utklipp til oppgave 2-2c

Jeg legger inn normalfordelingen med $\mu = 200 \cdot 0,75$ og $\sigma = \sqrt{200 \cdot 0,75 \cdot 0,25}$. Deretter la jeg inn signifikansnivået 0,05 i svarfeltet, det gir oss at Y må være minst 160,07. Vi må runde opp til 161 for å være sikre på at p -verdien blir lavere enn signifikansnivået.

For å konkludere med at legemiddel B virker bedre enn A må det virke på minst 161 av de 200 pasientene.

Oppgave 2-3

Olivia tar opp et annuitetslån på 2 500 000 kroner for å kjøpe bolig. Hun velger årlige terminer og en nedbetalingstid på 25 år. Det første terminbeløpet skal betales om ett år. Renten er på 5,5 % per år.

a) Hvor store blir de årlige terminbeløpene?

Etter 5 år vil Olivia utvide lånet for å pusse opp badet. Hun håper å få låne 500 000 kroner ekstra til samme rente, men hun vil ikke forlenge nedbetalingstiden på lånet.

b) Hvor store blir de nye terminbeløpene?

Olivia vet at dersom de nye terminbeløpene blir for store, må hun forlenge nedbetalingstiden.

- c) Hvor lang blir nedbetalingstiden dersom hun betaler 200 000 kroner hver termin etter at hun har utvidet lånet?

✓ Løsningsforslag

Jeg velger å løse disse oppgavene i CAS, men jeg har tatt med et eksempel på løsning i regneark på oppgave 3c), se nedenfor.

1	$\sum_{i=1}^{25} \frac{x}{1.055^i} = 2500000$	
	NLøs: {x = 186373.38237}	
2	$\sum_{i=1}^{20} \frac{x}{1.055^i} = 500000$	
	NLøs: {x = 41839.66502}	
3	HøyreSide(\$1) + HøyreSide(\$2)	
	≈ {228213.04738}	
4	$\sum_{i=21}^{25} \frac{\text{HøyreSide}(\$1)}{1.055^i}$	
	≈ {272766.79572}	
5	$\text{Sum}\left(\frac{200000}{1.055^i}, i, 1, x\right) = 2500000 + 500000 - \text{Element}(\$4, 1), x = 1$	
	NLøs: {x = 25.8915}	

Figur 5: Utklipp til oppgave 2-3

- a) Summen av nåverdiene til terminbeløpene skal bli lik lånebeløpet. Jeg setter opp dette som en likning i CAS med $\text{Sum}((x/1.055^i), i, 1, 25) = 2500000$ og løser, se linje 1 i utklippet.

Terminbeløpet er 186 373 kr.

- b) Jeg setter opp det ekstra lånet som et nytt lån til samme rente med 20 års nedbetalingstid. Jeg regner ut terminbeløpet til dette lånet på samme måte som i a), og får terminbeløpet 41 839,67 kr. Se linje 2 i utklippet.

Olivia må betale for begge lånene fra år 5 og utover, se linje 3.

Det nye terminbeløpet blir 228 213 kr fra år 5 og utover.

- c) Etter 5 år så har Olivia allerede betalt ned lånet med kr 272 767, se linje 4.

I linje 5 så setter jeg opp en likning. På venstre side har vi summen av nåverdiene til terminbeløpene, men med ukjent antall terminer. På høyre side har vi lånebeløpet etter 5 år, som blir det originale lånebeløpet og ekstralånet, minus 272 767 kr. Fra CAS ser jeg at det tar 25,89 år etter de 5 første årene før lånet er nedbetalt. Jeg runder opp til 26 siden det er først i dette året at lånet er tilbakebetalt.

Den nye tilbakebetalingstiden blir 31 år.



Løsning med regneark

Det er mulig å gjøre alle deloppgavene i denne oppgaven i regneark (i hvert fall hvis du bruker målsøking).

Nedenfor har jeg løst oppgave c) i regneark ved å sette opp lånet og beregne renter for hvert år. I år 5 så legger jeg til 500 000 kr ekstra på lånet (celle C43) og endrer terminbeløpet til 200 000 kr (celle E43).

Deretter fyller jeg bare formlene nedover og utvider tabellen fram til jeg ser at lånet er tilbakebetalt.

Som vi ser er lånet fullstendig tilbakebetalt i år 31 hvor avdragene er større enn restlånet.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2			Rente	5,50 %								
3			Lånebeløp	kr 2 500 000,00								
4			Ekstralån år 5	kr 500 000,00								
5												
6												
36												
37		A	Restlån	Renter	Terminbeløp	Avdrag		År	Restlån	Renter	Terminbeløp	Avdrag
38	1	kr	2 500 000,00	kr 137 500,00	kr 186 373,38	kr 48 873,38		1	=D3	=C38*rente	#I/T	=E38-D38
39	2	kr	2 451 126,62	kr 134 811,96	kr 186 373,38	kr 51 561,42		2	=C38-F38	=C39*rente	=E38	=E39-D39
40	3	kr	2 399 565,20	kr 131 976,09	kr 186 373,38	kr 54 397,30		3	=C39-F39	=C40*rente	=E39	=E40-D40
41	4	kr	2 345 167,90	kr 128 984,23	kr 186 373,38	kr 57 389,15		4	=C40-F40	=C41*rente	=E40	=E41-D41
42	5	kr	2 287 778,76	kr 125 827,83	kr 186 373,38	kr 60 545,55		5	=C41-F41	=C42*rente	=E41	=E42-D42
43	6	kr	2 727 233,20	kr 149 997,83	kr 200 000,00	kr 50 002,17		6	=C42-F42+D4	=C43*rente	#I/T	=E43-D43
44	7	kr	2 677 231,03	kr 147 247,71	kr 200 000,00	kr 52 752,29		7	=C43-F43	=C44*rente	=E43	=E44-D44
45	8	kr	2 624 478,74	kr 144 346,33	kr 200 000,00	kr 55 653,67		8	=C44-F44	=C45*rente	=E44	=E45-D45
46	9	kr	2 568 825,07	kr 141 285,38	kr 200 000,00	kr 58 714,62		9	=C45-F45	=C46*rente	=E45	=E46-D46
47	10	kr	2 510 110,45	kr 138 056,07	kr 200 000,00	kr 61 943,93		10	=C46-F46	=C47*rente	=E46	=E47-D47
48	11	kr	2 448 166,52	kr 134 649,16	kr 200 000,00	kr 65 350,84		11	=C47-F47	=C48*rente	=E47	=E48-D48
49	12	kr	2 382 815,68	kr 131 054,86	kr 200 000,00	kr 68 945,14		12	=C48-F48	=C49*rente	=E48	=E49-D49
50	13	kr	2 313 870,54	kr 127 262,88	kr 200 000,00	kr 72 737,12		13	=C49-F49	=C50*rente	=E49	=E50-D50
51	14	kr	2 241 133,42	kr 123 262,34	kr 200 000,00	kr 76 737,66		14	=C50-F50	=C51*rente	=E50	=E51-D51
52	15	kr	2 164 395,76	kr 119 041,77	kr 200 000,00	kr 80 958,23		15	=C51-F51	=C52*rente	=E51	=E52-D52
53	16	kr	2 083 437,53	kr 114 589,06	kr 200 000,00	kr 85 410,94		16	=C52-F52	=C53*rente	=E52	=E53-D53
54	17	kr	1 998 026,59	kr 109 891,46	kr 200 000,00	kr 90 108,54		17	=C53-F53	=C54*rente	=E53	=E54-D54
55	18	kr	1 907 918,05	kr 104 935,49	kr 200 000,00	kr 95 064,51		18	=C54-F54	=C55*rente	=E54	=E55-D55
56	19	kr	1 812 853,55	kr 99 706,95	kr 200 000,00	kr 100 293,05		19	=C55-F55	=C56*rente	=E55	=E56-D56
57	20	kr	1 712 560,49	kr 94 190,83	kr 200 000,00	kr 105 809,17		20	=C56-F56	=C57*rente	=E56	=E57-D57
58	21	kr	1 606 751,32	kr 88 371,32	kr 200 000,00	kr 111 628,68		21	=C57-F57	=C58*rente	=E57	=E58-D58
59	22	kr	1 495 122,64	kr 82 231,75	kr 200 000,00	kr 117 768,25		22	=C58-F58	=C59*rente	=E58	=E59-D59
60	23	kr	1 377 354,39	kr 75 754,49	kr 200 000,00	kr 124 245,51		23	=C59-F59	=C60*rente	=E59	=E60-D60
61	24	kr	1 253 108,88	kr 68 920,99	kr 200 000,00	kr 131 079,01		24	=C60-F60	=C61*rente	=E60	=E61-D61
62	25	kr	1 122 029,87	kr 61 711,64	kr 200 000,00	kr 138 288,36		25	=C61-F61	=C62*rente	=E61	=E62-D62
63	26	kr	983 741,51	kr 54 105,78	kr 200 000,00	kr 145 894,22		26	=C62-F62	=C63*rente	=E62	=E63-D63
64	27	kr	837 847,29	kr 46 081,60	kr 200 000,00	kr 153 918,40		27	=C63-F63	=C64*rente	=E63	=E64-D64
65	28	kr	683 928,89	kr 37 616,09	kr 200 000,00	kr 162 383,91		28	=C64-F64	=C65*rente	=E64	=E65-D65
66	29	kr	521 544,98	kr 28 684,97	kr 200 000,00	kr 171 315,03		29	=C65-F65	=C66*rente	=E65	=E66-D66
67	30	kr	350 229,96	kr 19 262,65	kr 200 000,00	kr 180 737,35		30	=C66-F66	=C67*rente	=E66	=E67-D67
68	31	kr	169 492,60	kr 9 322,09	kr 200 000,00	kr 190 677,91		31	=C67-F67	=C68*rente	=E67	=E68-D68

Figur 6: Utklipp av regneark til oppgave 2-c

Oppgave 2-4

De fem første kubikktallene er $1^3, 2^3, 3^3, 4^3$ og 5^3 , se figuren over. La S_n være summen av de n første kubikktallene.

- a) Beskriv den rekursive sammenhengen mellom S_n og S_{n+1} . Bestem en eksplisitt formel for S_n .

b) Lag et program som regner ut S_{50} ved å bruke den rekursive sammenhengen du fant i oppgave a.

✓ Løsningsforslag

a) Jeg setter opp de første leddene og ser om jeg finner en rekursiv sammenheng som jeg kan bruke.

$$S_1 = 1^3$$

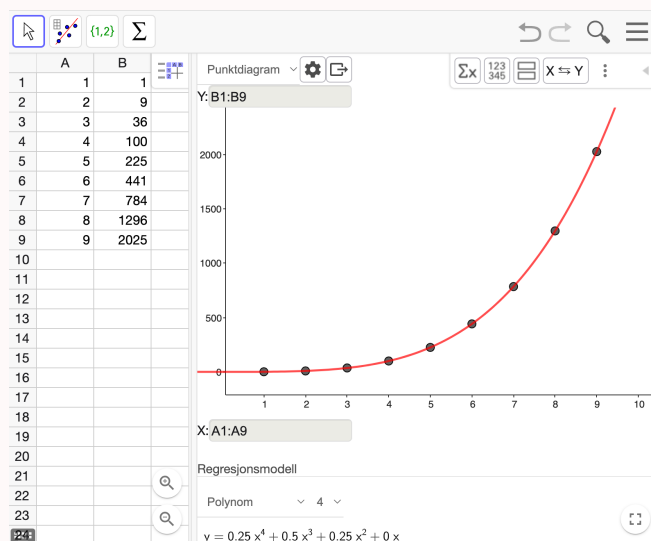
$$S_2 = 1^3 + 2^3 = S_1 + 2^3$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = S_2 + 3^3$$

Jeg ser at hvert ledd er det forrige leddet, pluss det neste kubikktallet. En rekursiv sammenheng mellom summene er altså

$$\underline{\underline{S_{n+1} = S_n + (n+1)^3}}$$

For å bestemme en eksplisitt formel brukte jeg regresjon i GeoGebra.



En eksplisitt formel for summene er

$$\underline{\underline{S_n = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2)}}$$

b) Jeg bruker følgende program

```
1 S = 0 # starter summen på 0
2
3 for n in range(1, 51):
4     # kjører løkka 50 ganger
5     S = S + n**3 #legger n^3 til S
6
7 print(S)
```

Python

Programmet gir at $S_{50} = 1\,625\,625$.

Oppgave 2-5

Svein har en kurv med røde og blå baller. Det er like mange baller av hver farge i kurven. Svein tar 15 baller tilfeldig fra kurven. Han ser etterpå at han trakk 9 røde og 6 blå baller.

- a) Bestem sannsynligheten for at han får dette resultatet dersom han starter med 30 baller i kurven.
- b) Hva er det mest sannsynlige antallet baller som lå i kurven?

✓ Løsningsforslag

- a) Vi har et forsøk uten tilbakelegging med to typer baller, så vi kan bruke en hypergeometrisk sannsynlighetsfordeling. Hvis det er 15 baller av hver type er sannsynligheten for å trekke 9 røde og 6 blå baller gitt ved

$$P(R = 9) = \frac{\binom{15}{9} \binom{15}{6}}{\binom{30}{15}} = 0,161$$

Sannsynligheten for å trekke 9 røde og 6 blå baller er 16,1 %.

- b) **Løsningsmetode 1: Programmering**

Her prøver jeg meg fram med programmering og setter inn ulike verdier for antallet baller i kurva. Man kan programmere binomialkoeffisientfunksjonen selv, eller bruke en ferdig funksjon fra `math`-biblioteket.

```
1 import math #math.comb er binomialkoeff.funksjonen
2
3 rod = 9
4 bla = 6
5
6 for n in range(18, 201, 2):
7     # lager ei løkke som tester alle partall fra 18 til og med 200
8     n1 = int(n/2) # halvparten av ballene er røde (må gjøre om til
9     teller = math.comb(n1, rod) * math.comb(n1, bla)
10    nevner = math.comb(n, (rod+bla))
11    ssh = teller / nevner
12
13    print(f"Ved {n} baller P(R=9) = {ssh:.5f}")
```

Utskriften forteller meg at det mest sannsynlige antallet baller i kurven er 34 eller 36.



Bruk 2n istedenfor n/2

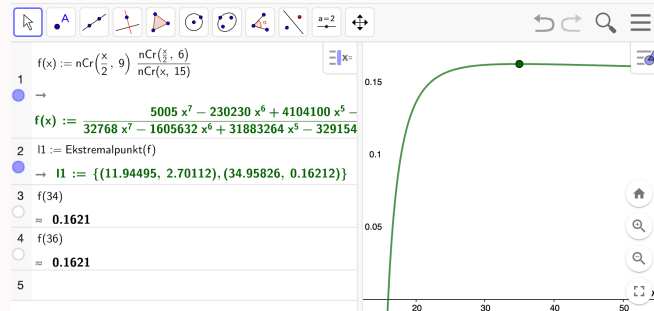
I mitt løsningsforslag har jeg gått ut fra at krukka inneholder n baller. Det er nok lurere å si at det er n røde baller i krukka, og at krukka samlet sett inneholder $2n$ baller. Da slipper du å gjøre om $\frac{n}{2}$ til heltall med `int()`.

Løsningsmetode 2: Funksjon

Jeg lager en funksjon hvor antall baller i kurva er ukjent.

$$f(x) = \frac{\binom{\frac{x}{2}}{9} \binom{\frac{x}{2}}{6}}{\binom{x}{15}}$$

Denne funksjonen er egentlig bare gyldig for partallene fra 18 og oppover, men jeg velger å tegne den uten begrensning i GeoGebra for å kunne finne ekstremalpunkter enkelt.



Jeg definerer funksjonen i CAS og finner ekstremalpunktet, se linje 1 og 2. Ekstremalpunktet ligger ved $x = 34,96$, dette er ikke en gyldig verdi for x . Jeg tester derfor sannsynligheten ved $x = 34$ og $x = 36$, begge disse er like store.

Det lå mest sannsynlig 34 eller 36 baller i kurven.