

# S2 eksamen V2025

## Oversikt

Del 1 — 2 timer — uten hjelpemidler

| Oppgave | Navn                                                                    | Temaer                                                                           | Løsningsforslag |
|---------|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1-1     | Integraler<br>S2 v25                                                    | integral                                                                         | ✓               |
| 1-2     | Bestem f<br>ut fra den<br>deriverte                                     | integral, tolk-<br>ning av integra-<br>ler, areal under<br>graf                  | ✓               |
| 1-3     | Sannsyn-<br>lighets-<br>fordeling<br>til brett-<br>spill                | diskrete sann-<br>synlighetsforde-<br>linger, varians,<br>forventnings-<br>verdi | ✓               |
| 1-4     | Ukjente<br>program-<br>mer S2<br>v25                                    | programmering,<br>rekker                                                         | ✓               |
| 1-5     | Enhets-<br>kostna-<br>der og<br>grense-<br>kostnader<br>fra graf<br>v25 | tolke grafer, en-<br>hetskostnad,<br>grenseinntekt<br>og grensekost-<br>nad      | ✓               |
| 1-6     | Hypo-<br>tesetest<br>bensin                                             | hypotesetest,<br>standard nor-<br>malfordeling,<br>normalfordeling               | ✓               |

Del 2 — 3 timer — med hjelpemidler

| Oppgave | Navn                                                     | Temaer                                                                                                     | Løsningsforslag |
|---------|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 2-1     | Grense-<br>inntekt og<br>grense-<br>kostnad<br>på del 2  | regresjon, tolk-<br>ning av in-<br>tegraler, sam-<br>let mengde,<br>grenseinntekt<br>og grensekost-<br>nad | ✓               |
| 2-2     | Normal-<br>fordelt<br>hoppkon-<br>kurranse               | normalforde-<br>ling, simulering,<br>programmering                                                         | ✓               |
| 2-3     | Logistisk<br>salg av<br>brann-<br>varslings-<br>systemer | logistisk funk-<br>sjon                                                                                    | ✓               |
| 2-4     | Noras<br>sparing<br>og lån                               | lån, sparing,<br>excel, cas                                                                                | ✓               |
| 2-5     | Vis at rek-<br>ke blir ln 2                              | bevis, utforsk-<br>ning, integral                                                                          | ✓               |

## Del 1

### Oppgave 1-1

Regn ut integralene

a)  $\int_0^1 (2e^x + 2x^2) dx$

b)  $\int \frac{2x-1}{x^2-x-6} dx$

#### ✓ Løsningsforslag

a)  $\int_0^1 (2e^x + 2x^2) dx = \left[ 2e^x + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \left( 2e^1 + \frac{2}{3}1^3 \right) - \left( 2e^0 + \frac{2}{3}0^3 \right) = 2e + \frac{2}{3} - 2 = \underline{\underline{2e - \frac{4}{3}}}$

b) Vi ser at den deriverte av uttrykket i nevneren er det samme som telleren, og det er derfor lurt å forsøke variabelskiftet  $u = x^2 - x - 6$ .

$$u = x^2 - x - 6 \implies \frac{du}{dx} = 2x - 1 \Leftrightarrow \frac{du}{2x - 1} = dx$$

Vi substituerer inn i det opprinnelige uttrykket

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x-6} dx = \int \frac{\cancel{2x-1}}{u} \frac{du}{\cancel{2x-1}} = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \underline{\underline{\ln|x^2-x-6| + C}}$$



### Løsning med delbrøkkoppspalting

Hvis du velger å løse ved hjelp av delbrøkkoppspalting så vil du etter faktorisering få følgende likning

$$2x - 1 = A(x + 2) + B(x - 3)$$

Etter integrasjon får du svaret  $\ln|x+2| + \ln|x-3| + C$ , som er det samme svaret som vi får med variabelskiftet skrevet på en annen form.

## Oppgave 1-2

Bestem et uttrykk for funksjonen  $f$  når du får vite at

- $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$
- Arealet av området som er avgrenset av grafen til  $f$ ,  $x$ -aksen og linjene  $x = 1$  og  $x = 2$  er  $\frac{11}{14}$ . Dette arealet ligger over  $x$ -aksen.



### Løsningsforslag

Vi vet at  $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$  vil ha uendelig mange antideriverte med ulike konstantledd

$$\int -\frac{2}{x^3} dx = \int -2x^{-3} dx = \frac{-2}{-2} x^{-2} + C = \frac{1}{x^2} + C$$

Her er  $C$  et hvilket som helst tall. Siden vi har fått vite at arealet av området som avgrenses av grafen til  $f$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  og  $x$ -aksen er lik  $\frac{11}{14}$ , samt at hele arealet ligger over  $x$ -aksen, kan vi bruke et bestemt integral for å finne verdien av  $C$ .

$$\int_1^2 \left( \frac{1}{x^2} + C \right) dx = \frac{11}{14}$$

$$\int_1^2 (x^{-2} + C) dx = \frac{11}{14}$$

$$\left[ -\frac{1}{x} + Cx \right]_1^2 = \frac{11}{14}$$

$$\left( -\frac{1}{2} + C \cdot 2 \right) - \left( -\frac{1}{1} + C \cdot 1 \right) = \frac{11}{14}$$

$$-\frac{1}{2} + 2C + \frac{1}{1} - C = \frac{11}{14}$$

$$C = \frac{11}{14} - \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$$

Vår antideriverte til  $f'(x)$  har altså  $C = \frac{2}{7}$ , derfor har vi for alle  $x \neq 0$ :

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{7}}}$$

### Oppgave 1-3

Til et brettspill hører det med en spesiell terning med 6 sider. Det er en side med en ener, en side med en toer, en side med en treer og tre sider med seksere. Vi kaster terningen én gang. La  $X$  være antall øyne terningen viser.

| $k$        | 1             | 2 | 3 | 6 |
|------------|---------------|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $\frac{1}{6}$ |   |   |   |

- a) Skriv av og fyll ut tabellen. Vis at  $E(X) = 4$ .  
b) Bestem  $\text{Var}(X)$ .

#### ✓ Løsningsforslag

| a) | $k$                          | 1                                     | 2                                     | 3                                     | 6                                      | Sum                           |
|----|------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------|
|    | $P(X = k)$                   | $\frac{1}{6}$                         | $\frac{1}{6}$                         | $\frac{1}{6}$                         | $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$            | 1                             |
|    | $k \cdot P(X = k)$           | $\frac{1}{6}$                         | $\frac{2}{6}$                         | $\frac{3}{6}$                         | $\frac{18}{6}$                         | $\frac{24}{6} = 4$            |
|    | $(k - \mu)^2 \cdot P(X = k)$ | $3^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{6}$ | $2^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$ | $1^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ | $2^2 \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{6}$ | $\frac{26}{6} = \frac{13}{3}$ |

Vi finner forventningsverdien ved å finne summen av rad 3 siden  $E(X) = \sum k \cdot P(X = k)$

$$E(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{18}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

**Forventningsverdien**  $E(X) = \underline{4}$

- b) Vi finner variansen ved å summere rad 4 i tabellen siden  $\text{Var}(X) = \sum (k - \mu)^2 \cdot P(X = k)$

$$\text{Var}(X) = \frac{9}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} + \frac{12}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

**Variansen er**  $\text{Var}(X) = \underline{\underline{\frac{13}{3}}}$

### Oppgave 1-4

En elev arbeider med en tallfølge og har skrevet denne koden:

```
1 a = 2
2 n = 5
3 for i in range(1, n + 1):
4     print(a)
5     a = a + (i + 2)
```

Python

- a) Beskriv mønsteret i tallfølgen eleven arbeider med.  
Hva blir resultatet når koden kjøres?

Eleven har også skrevet denne koden:

```
1 a = 2
2 n = 5
```

Python

```

3 S = 0
4 for i in range(1, n + 1):
5     S = S + a
6     a = a + (i + 2)
7 print(S)

```

- b) Hva ønsker eleven nå å finne ut?  
Hva blir resultatet når koden kjøres?

### ✓ Løsningsforslag

- a) Her setter vi opp en oversikt for å se hvordan variablene i programmet utvikler seg.

| i | a  | Beregning av neste a          |
|---|----|-------------------------------|
| 1 | 2  | $2 + 1 + 2 = \underline{5}$   |
| 2 | 5  | $5 + 2 + 2 = \underline{9}$   |
| 3 | 9  | $9 + 3 + 2 = \underline{14}$  |
| 4 | 14 | $14 + 4 + 2 = \underline{20}$ |
| 5 | 20 |                               |

Vi ser en tallfølge hvor differansene mellom leddene starter på 3, og deretter øker med 1 for hvert ledd. Matematisk kan dette uttrykkes med den rekursive sammenhengen

$$a_{n+1} = a_n + n + 2$$

**Koden skriver ut leddene i tallfølgen 2, 5, 9, 14, 20.**

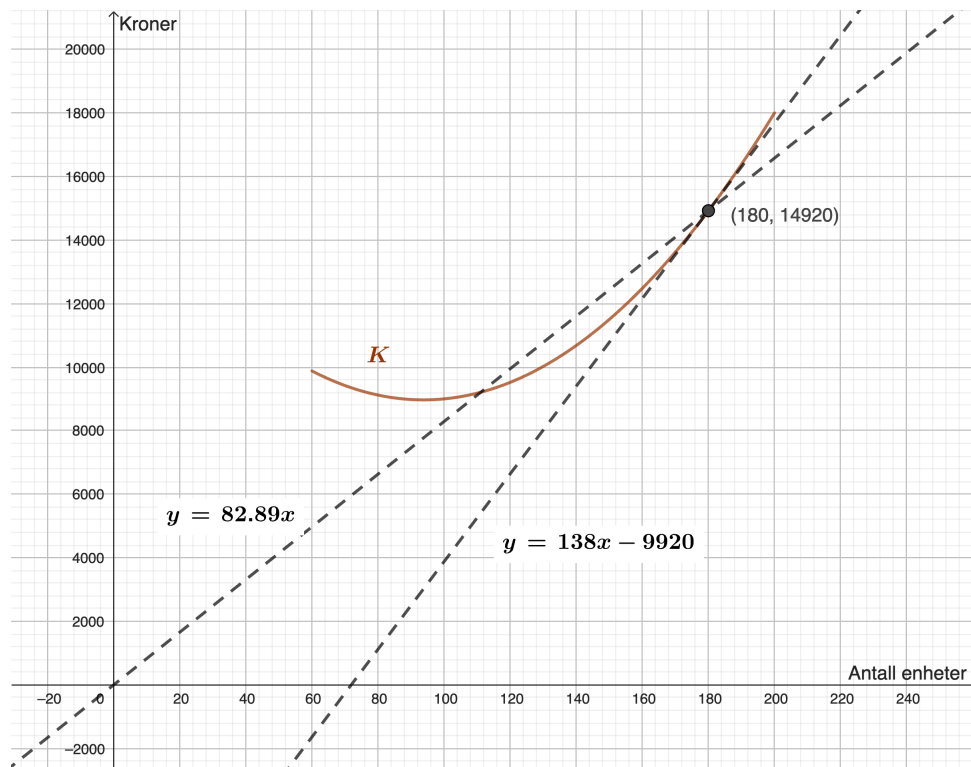
- b) Eleven har lagt til en variabel **S**. **S** gir en løpende sum av verdiene til **a**, derfor vil **S** være delsummen til rekka etter **n** ledd.

**Eleven ønsker å finne delsummen til rekka etter 5 ledd, altså  $2 + 5 + 9 + 14 + 20 = \underline{\underline{50}}$**

## Oppgave 1-5

Figuren viser grafen til en kostnadsfunksjon  $K$  og to rette linjer.

Linjen  $y = 138x - 9920$  tangerer grafen  $K$  i punktet  $(180, 14\,920)$ .



Figur 1: Kostnadsfunksjon med to rette linjer

- a) Bruk figuren til å finne enhetskostnaden og grensekostnaden når det blir produsert 180 enheter. Husk å begrunne svarene.

Vi setter prisen per enhet til  $p$  kroner, slik at inntekten  $I(x)$  kroner er gitt ved  $I(x) = p \cdot x$ .

- b) Bestem prisen  $p$  slik at overskuddet vil bli størst mulig ved produksjon og salg av 180 enheter

### ✓ Løsningsforslag

- a) Enhetskostnaden når det produseres 180 enheter er gitt ved

$$E(180) = \frac{K(180)}{180} = \frac{14\,920}{180} = 82,89$$



#### Du trenger ikke regne ut delestykket over

Du trenger ikke regne ut  $\frac{14920}{180}$  siden du har fått oppgitt en linje fra origo til punktet  $(180, 14\,920)$ . Stigningstallet til en rett linje er jo  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , og i vårt tilfelle vil  $K(180) = \Delta y$  og  $180 = \Delta x$ . Denne linja har stigningstallet 82,89, derfor må  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14920}{180} = 82,89$

Grensekostnaden er den deriverte av kostnadsfunksjonen, og grensekostnaden ved 180 enheter er derfor lik stigningstallet til tangenten til  $K$  ved  $x = 180$ . Jeg leser av stigningstallet til tangenten og finner at grensekostnaden er 138.

**Enhetskostnaden ved 180 enheter er 82,89 kr/enhet og grensekostnaden er 138 kr/enhet.**

- b) For at vi skal ha størst overskudd må  $I'(x) = K'(x)$ . Vi bestemmer grenseinntekten.

$$I(x) = p \cdot x \implies I'(x) = p$$

For å finne prisen som gir størst overskudd ved produksjon og salg av 180 enheter så setter vi opp  $I'(180) = K'(180)$ .

$$I'(180) = K'(180) \Leftrightarrow p = 138$$

**Prisen 138 kr gir oss størst overskudd ved produksjon og salg av 180 enheter.**

### Oppgave 1-6

Benz A/S har utviklet en ny type bensin som de mener øker kjørelengden per liter. Den gamle bensinen gir en gjennomsnittlig kjørelengde på 20 km/L, med et standardavvik på 2,5 km/L.

Benz A/S ønsker å teste om den nye bensinen øker kjørelengden, og planlegger å gjennomføre en hypotesetest med 25 biler.

- a) Sett opp en nullhypotese og en alternativ hypotese for testen.

Det viser seg at de 25 bilene kjører i gjennomsnitt 21 km/L. Gå ut fra at kjørelengden er normalfordelt med standardavvik 2,5 km/L.

- b) Gjennomfør hypotesetesten, og bruk den til å avgjøre om Benz A/S kan si at den nye bensinen øker kjørelengden. Bruk et signifikansnivå på 5 %.

### ✓ Løsningsforslag

- a) Vi ønsker å teste om den nye bensinen gir bedre drivstofføkonomi enn den gamle. La  $\mu$  være forventningsverdien for kjørelengde per L for den nye bensinen. Da er hypotesene våre:

$$H_0 : \mu = 20$$

$$H_A : \mu > 20$$

- b) Denne hypotesetesten er av et gjennomsnitt. La  $\bar{X}$  være gjennomsnittsverdien for drivstofføkonomien for et utvalg av biler. Etter sentralgrensesetningen er  $\bar{X}$  normalfordelt med:

$$E(\bar{X}) = \mu = 20$$

$$SD(\bar{X}) = \frac{SD(X)}{\sqrt{n}} = \frac{2,5}{\sqrt{25}} = \frac{2,5}{5} = \frac{1}{2}$$

Observasjonen vår er  $\bar{X} = 21$ . Vi gjør om til standard normalfordeling:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{SD(\bar{X})} = \frac{21 - 20}{0,5} = 2$$

Sannsynligheten for at  $\bar{X}$  skal ligge mer enn 2 standardavvik over forventningsverdien er kan vi finne ved hjelp av den vedlagte normalfordelingstabellen.

$$P(Z > 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

**p-verdien er 0,0228, som er mindre enn signifikansnivået vårt. Vi kan dermed forkaste nullhypotesen om at den nye bensinen er like god som den gamle.**

## Del 2

### Oppgave 2-1

En bedrift produserer og selger  $x$  enheter av en vare per uke. Tabellen nedenfor viser kostnaden ved ulike produksjonsmengder.

|                              |     |     |      |      |
|------------------------------|-----|-----|------|------|
| Produksjon (enheter per uke) | 10  | 20  | 40   | 50   |
| Kostnad (kroner)             | 400 | 850 | 2070 | 2890 |

En modell for kostnaden  $K(x)$  kroner kan skrives på formen

$$K(x) = ax^2 + bx + c$$

a) Vis at  $K'(x) = 1,23x + 25$

Inntekten  $I(x)$  kroner per uke er gitt ved

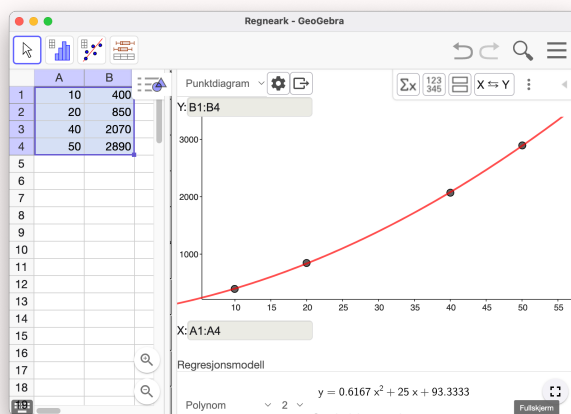
$$I(x) = 3000 \cdot \ln(5x)$$

b) Bestem  $I'(35)$  og  $K'(35)$ . Gi en praktisk tolkning av svarene.

c) Bestem  $\int_{20}^{30} K'(x)dx$ . Gi en praktisk tolkning av svaret.

#### ✓ Løsningsforslag

a)



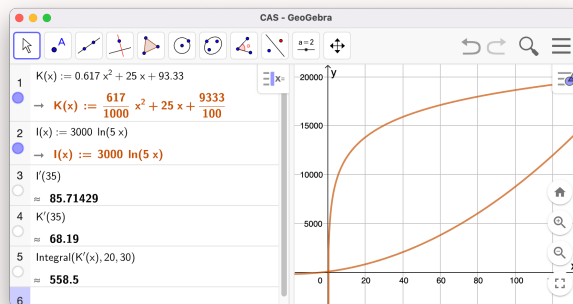
Figur 2: Regresjon i GeoGebra

Vi finner en andregradsmodell for kostnadene ved hjelp av regresjon i GeoGebra. Se utklippet over.

$$K(x) = 0,617x^2 + 25x + 93,33$$

**Grenseinntekten**  $K'(x) = 2 \cdot 0,617x + 25 = \underline{\underline{1,23x + 25}}$ .

b)



Figur 3: Grenseinntekt og grensekostnad i GeoGebra

Se linje 3 og 4 i CAS.

$$\underline{\underline{I'(35) = 85,71 \text{ og } K'(35) = 68,19}}$$

**Her øker grenseinntekten mer enn grensekostnaden, altså vil vi tjene mer penger (85,71 kr) på å produsere en mer enhet, enn hva vi må betale i produksjonskostnader for å produsere en mer enhet (68,19 kr). Vi tjener altså omtrent  $85,71 - 68,19 = 17,5$  kr på å produsere og selge 36 enheter framfor 35 enheter.**

c) Se linje 5 i CAS.

$$\underline{\underline{\int_{20}^{30} K'(x) dx = 558,5}}$$

Dette er det bestemte integralet av *grensekostnaden*  $K'(x)$ , altså vil svaret vårt tilsvare

$$\int_{20}^{30} K'(x) dx = K(30) - K(20)$$

**558,5 kr er altså differansen i produksjonskostnader mellom å produsere 20 enheter og 30 enheter.**

## Oppgave 2-2

Tre skihoppere skal delta i en hoppkonkurranse. Tabellen nedenfor viser forventningsverdi og standardavvik for lengden på et hopp for hver av de tre hopperne. Vi antar at lengden på hoppene er uavhengig og normalfordelt.

|        | Forventningsverdi | Standardavvik |
|--------|-------------------|---------------|
| Birger | 70 meter          | 20 meter      |
| Maren  | 80 meter          | 5 meter       |
| Espen  | 75 meter          | 10 meter      |

- a) Gjør beregninger for hver skihopper, og bestem sannsynligheten for at skihopperen hopper lenger enn 90 meter i et tilfeldig hopp.

I første omgang hoppet Maren 83 meter.

- b) Bestem sannsynligheten for at Maren hoppet lengst i denne omgangen.

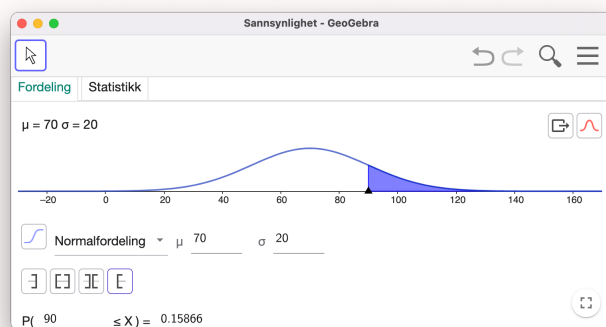
I andre omgang gjør alle et nytt hopp.

c) Bruk simulering og bestem sannsynligheten for at Maren hopper lengst i denne omgangen.

### ✓ Løsningsforslag

La  $B$ ,  $M$  og  $E$  være lengdene av hoppene til henholdsvis Birger, Maren og Espen.

Vi bestemmer sannsynligheten for at hver av dem hopper 90 meter eller lengre ved hjelp av sannsynlighetsvinduet i GeoGebra, se skjermbildet under. (Kun Birgers utklipp er vist).

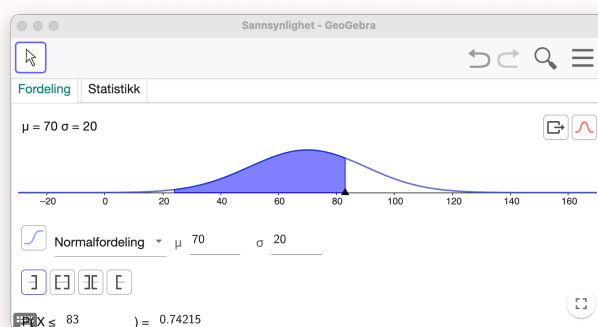


Figur 4: Sannsynligheten for at Birger hopper 90 meter eller lengre

$$P(B > 90) = 0,1587, \quad P(M > 90) = 0,0228, \quad P(E > 90) = 0,0668$$

**Sannsynlighetene for at Birger, Maren og Espen hopper lengre enn 90 meter er i ett tilfeldig hopp er henholdsvis 0,1587, 0,0228 og 0,0668.**

b) Hvis Maren skal hoppe lengst med et hopp på 83 meter så må både  $B < 83$  og  $E < 83$ . Vi kan bruke multiplikasjonsprinsippet for å finne sannsynligheten for at begge disse utfallene skjer samtidig. Igjen bestemmer vi sannsynligheten ved hjelp av sannsynlighetsvinduet i GeoGebra.



Figur 5: Sannsynligheten for at Birger hopper kortere enn 83 meter

$$\begin{aligned} P(\text{Maren vinner med 83 m}) &= P(B < 83) \cdot P(E < 83) \\ &= 0,7422 \cdot 0,7881 = \underline{\underline{0,5849}} \end{aligned}$$

**Sannsynligheten for at Maren vinner med et hopp på 83 meter er 0,5849.**

- c) Vi lager en simulering i Python hvor vi trekker hopplengder ut fra normalfordelingene til  $B$ ,  $M$  og  $E$ . Deretter sjekker vi om Marens hopp er det lengste hoppet.

```
1 from random import gauss
2 N = 100_000
3 antall_gunstige = 0
4
5 for i in range(N):
6     # Trekker hopplengder fra normalfordelingene
7     B = gauss(70, 20)
8     M = gauss(80, 5)
9     E = gauss(75, 10)
10
11     # Sjekker om Marens hopp er lengre enn både Espens og Birgers
12     if (M > B and M > E):
13         antall_gunstige += 1
14
15 ssh = antall_gunstige / N
16
17 print(f"Det er omtrent {ssh * 100:.2f} % sannsynlighet for at Maren
    hopper lengst i andre omgang")
```

Etter å ha kjørt programmet flere ganger ser jeg at sannsynligheten er stabil på omtrent 47,4 %.

**Det er omtrent 47,4 % sannsynlighet for at Maren hopper lengst i andre omgang.**

### Oppgave 2-3

Sikkerhetsselskapet SaifY skal lansere et nytt brannvarslingssystem i en by med 2 millioner husstander. SaifY regner med at antallet husstander som har brannvarslingssystemet  $t$  uker etter lanseringen, vil følge modellen  $B$  gitt ved

$$B(t) = \frac{1700000}{1 + 500e^{-0,07t}}$$

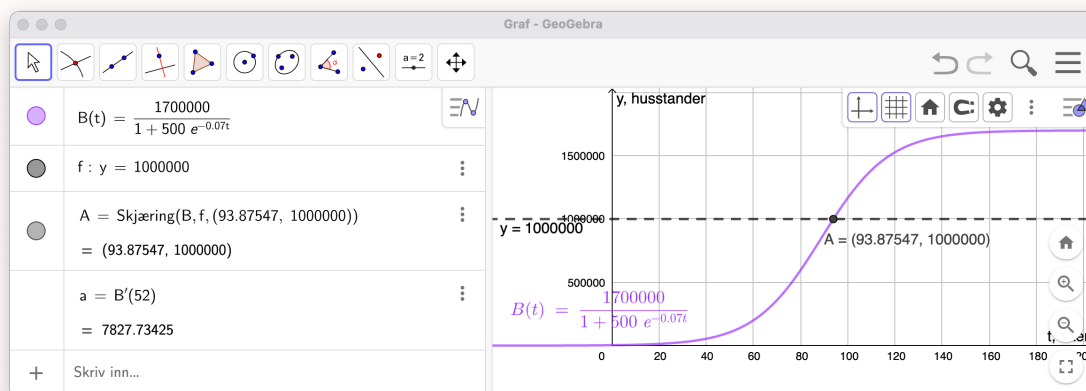
- Hvor lang tid vil det ta før halvparten av husstandene i byen har brannvarslingssystemet, ifølge modellen?
- Bestem  $B'(52)$ . Gi en praktisk tolkning av svaret.

Det viser seg at konkurrenten UnSaif planlegger å lansere et brannvarslingssystem med tilsvarende teknologi samtidig. Dette vil påvirke salget til SaifY.

Etter å ha hørt om planene til UnSaif antar SaifY at - de totalt vil få solgt brannvarslingssystemet sitt til en million husstander - fire tusen husstander har brannvarslingssystemet når det lanseres - flest nye husstander kjøper brannvarslingssystemet i uke 65

- Bruk antakelsene ovenfor til å lage en ny logistisk modell  $F$  for antallet husstander som har brannvarslingssystemet etter  $t$  uker.

## ✓ Løsningsforslag



Figur 6: Logistisk modell for brannalarmer i by

- a) Jeg la inn modellen i GeoGebra og la inn linja  $y = 1\,000\,000$  for å sjekke når halvparten hadde fått systemet. Jeg fant skjæringen med  $B$  i punktet  $A = (93,88, 1000000)$ .

**Det tar 94 uker før halvparten av husstandene i byen har brannvarslingssystemet ifølge modellen.**

- b) Se nederst i GeoGebra-utklippet.

$$\underline{\underline{B'(52) = 7827,7}}$$

**Etter 52 uker (ett år) så selges brannvarslingssystemet til omtrent 7828 husstander per uke.**

- c) En logistisk modell er gitt ved

$$f(x) = \frac{N}{1 + a \cdot e^{-kx}}$$

- $N$  er «bæreevnen» eller maksimalverdien for funksjonen
- $\frac{N}{1+a}$  vil være funksjonsverdien når  $x = 0$
- Vi har raskest vekst i vendepunktet som vi finner i  $\left(\frac{\ln a}{k}, \frac{N}{2}\right)$

Med bakgrunn i opplysningene i oppgaveteksten kan vi bestemme  $N = 1\,000\,000$  siden dette er antallet husstander de totalt selger til.

Videre vet vi at det er 4000 husstander som har systemet ved  $x = 0$ , derfor må

$$\frac{N}{1+a} = 4000 \Leftrightarrow \frac{1000000}{1+a} = 4000 \Leftrightarrow \frac{1000}{4} = 1+a \Leftrightarrow a = 250 - 1 = 249$$

Til sist vet vi at vendepunktet (den raskeste veksten) er i uke 65, altså må

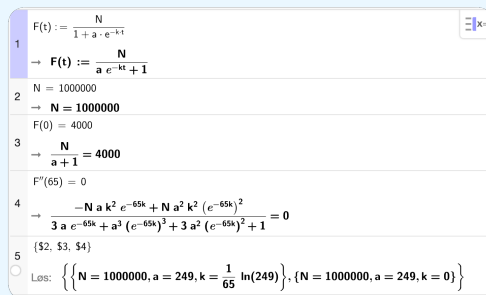
$$\frac{\ln a}{k} = 65 \Leftrightarrow \frac{\ln 249}{k} = 65 \Leftrightarrow 5,517 = 65k \Leftrightarrow k = \frac{5,517}{65} = 0,0849$$

En logistisk modell som passer til dataene vil være

$$F(t) = \frac{1\,000\,000}{1 + 249e^{-0,0849t}}$$

### i Løsning av 2-4 i CAS

Denne oppgaven kan også løses i CAS ved å sette opp 3 likninger for å bestemme  $N$ ,  $a$  og  $k$ , se skjermbildet under. Du kan også gjøre regresjon på punktene  $(0, 4000)$ ,  $(65, 500\,000)$  og  $(200, 1\,000\,000)$  med logistisk modell.



```

1 F(t) := N / (1 + a * e^(-k*t))
2 N = 1000000
3 F(0) = 4000
4 F'(65) = 0
5 Solve: {N = 1000000, a = 249, k = 1/65 * ln(249)}

```

## Oppgave 2-4

Nora blir 37 år i 2026 og vil begynne å spare til egen pensjon.

Hun vil sette et fast beløp inn på en konto i banken 1. januar hvert år. Hun vil begynne sparingen 1. januar 2026 og holde på til og med januar 2055.

Målet hennes er å ha 3 750 000 kroner i banken etter at rentene for 2055 er lagt til. Nora venter at den årlige rentesatsen på kontoen vil være 2,5 %.

a) Hvor stort beløp må Nora sette i banken hvert år for å nå målet?

Nora har et huslån. Lånet har årlige terminer, og Nora betaler terminbeløpet i januar hvert år. I januar 2026 vil lånet være på 3 000 000 kroner.

Nora vil betale ned lånet før det året hun fyller 70. Hun har regnet seg fram til at hun da må betale 150 000 kroner hver termin fra og med januar 2026 til og med januar 2058.

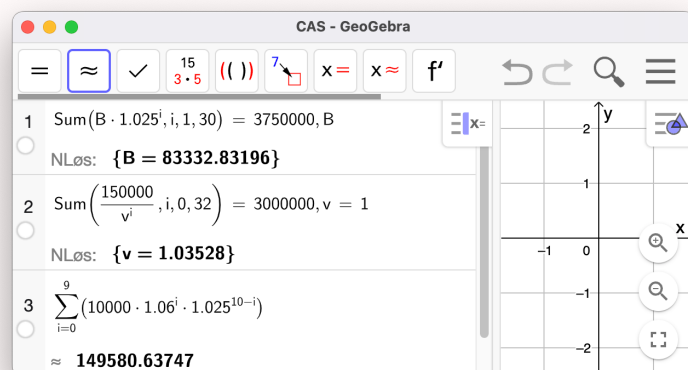
b) Hvor høy har Nora regnet med at den årlige rentesatsen på lånet vil være?

Nora ønsker å hjelpe datteren med egenkapital til bolig. Nora oppretter derfor en ekstra sparekonto og setter opp en spareplan med ett årlig innskudd i 10 år. Det første innskuddet skal være 10000 kroner, deretter skal beløpene hun setter inn, øke med 6 % per år. Nora venter at rentesatsen vil være 2,5 % per år.

Målet er å ha 150 000 kroner på sparekontoen ett år etter at hun har satt inn det siste beløpet.

c) Vil Nora nå målet sitt?

## ✓ Løsningsforslag



Figur 7: CAS-løsning av 2-4

- a) Vi kaller det ukjente beløpet  $B$ . Nora skal sette inn  $B$  på konto 30 ganger. Det siste beløpet skal ha fått renter i 1 år, mens det første beløpet skal ha fått renter i 30 år.

For å ha 3 750 000 kr på konto etter 30 år så kan vi altså sette opp en likning med ei rekke. Likningen er løst i linje 1 i GeoGebra.

$$\underbrace{B \cdot 1,025^1}_{\text{År 2055}} + \underbrace{B \cdot 1,025^2}_{\text{År 2054}} + \dots + \underbrace{B \cdot 1,025^{30}}_{\text{År 2026}} = 3\,750\,000$$

**Nora må sette inn 83 333 kr hvert år for å nå målet.**

- b) Vi kaller den ukjente vekstfaktoren til renta  $v$ . Nora skal betale inn lånet over 33 terminer med første termin 1. januar 2026. Nåverdien (NV) til terminbeløpene vil være:

$$\underbrace{\frac{150\,000}{v^0}}_{\text{NV til 2026-beløpet}} + \underbrace{\frac{150\,000}{v^1}}_{\text{NV til 2027-beløpet}} + \dots + \underbrace{\frac{150\,000}{v^{32}}}_{\text{NV til 2058-beløpet}} = 3\,000\,000$$

Likningen er løst i linje 2 i GeoGebra.

**Nora har regnet med at den årlige rentesatsen er 3,528 %.**

- c) Sparebeløpene til Nora kan sees på som en rekke der det første beløpet er 10000 kr og får renter i 10 år, mens det siste beløpet er  $10000 \cdot 1,06^9$  og får renter i ett år.

$$\underbrace{10000 \cdot 1,06^0 \cdot 1,025^{10}}_{\text{Beløp år 0}} + \underbrace{10000 \cdot 1,06^1 \cdot 1,025^9}_{\text{Beløp år 1}} + \dots + \underbrace{10000 \cdot 1,06^9 \cdot 1,025^1}_{\text{Beløp år 9}}$$

Beløpet er beregnet i linje 3 i GeoGebra.

**Nora vil ikke nå målet på 150 000 kr. Hun vil ha 149 581 kr på kontoen etter 10 år.**

### i Alternativ løsning med målsøking i Excel

I regnearket nedenfor har jeg satt opp de tre deloppgavene i Excel for å løse med målsøking.

**Oppgave a** er løst ved å beregne innskuddet på kontoen i starten og slutten av hvert år. Noras sparebeløp er satt i celle **C5**. Ved å bruke målsøking og sette at celle **C37** skal bli 3 750 000 kr ved å endre på **C5** fikk jeg svaret 83 333 kr.

**Oppgave b** er løst ved å skrive inn restlånet 1. januar 2026, og beregne restlånene etter innbetaling hvert år. Restlånet etter innbetaling beregnes ved å sette avdraget lik  $\frac{T}{v^{32-i}}$ , der  $v$  er vekstfaktoren til renta og  $i$  er antall år siden 1. januar 2026. Renta ble funnet ved å gjøre målsøking der restlånet etter innbetaling skal være 0 kr i 2058.

**Oppgave c.** I denne oppgaven øker sparebeløpet med 6 % per år i kolonne **O**, samtidig som vi beregner renter i kolonner **Q**. I slutten av 2035 vil Nora ha 149 581 kr på konto.

|    | B          | C            | D               | E               | F         | G              | H             | I                   | J                     | K    | L              | M            | N             | O             | P | Q |
|----|------------|--------------|-----------------|-----------------|-----------|----------------|---------------|---------------------|-----------------------|------|----------------|--------------|---------------|---------------|---|---|
| 1  | Oppgave a  |              |                 |                 | Oppgave b |                |               |                     | Oppgave c             |      |                |              |               |               |   |   |
| 2  | Rente      | 2,50 %       |                 |                 | Rente     | 3,53 %         |               |                     |                       |      | Rente          | 2,50 %       |               |               |   |   |
| 3  | Sparebeløp | kr 83 332,83 |                 |                 |           |                |               |                     |                       |      |                |              |               |               |   |   |
| 4  |            |              |                 |                 |           |                |               |                     |                       |      |                |              |               |               |   |   |
| 5  | År         | Sparebeløp   | Konto 1. jan    | Konto 31. des   | År        | År etter start | Terminbeløp   | Restlån før innbet. | Restlån etter innbet. | År   | År etter start | Sparebeløp   | Konto 1. jan  | Konto 31. des |   |   |
| 6  | 2026       | kr 83 332,83 | kr 83 332,83    | kr 85 416,15    | 2026      | 0              | kr 150 000,00 | kr 3 000 000,00     | kr 2 950 533,99       | 2026 | 0              | kr 10 000,00 | kr 10 000,00  | kr 10 250,00  |   |   |
| 7  | 2027       | kr 83 332,83 | kr 168 748,98   | kr 172 987,71   | 2027      | 1              | kr 150 000,00 | kr 2 850 533,99     | kr 2 899 323,07       | 2027 | 1              | kr 10 600,00 | kr 20 850,00  | kr 21 371,25  |   |   |
| 8  | 2028       | kr 83 332,83 | kr 256 300,54   | kr 262 708,05   | 2028      | 2              | kr 150 000,00 | kr 2 899 323,07     | kr 2 846 305,67       | 2028 | 2              | kr 11 236,00 | kr 32 607,25  | kr 33 422,43  |   |   |
| 9  | 2029       | kr 83 332,83 | kr 346 040,89   | kr 354 691,91   | 2029      | 3              | kr 150 000,00 | kr 2 846 305,67     | kr 2 791 418,08       | 2029 | 3              | kr 11 910,16 | kr 45 332,59  | kr 46 465,91  |   |   |
| 10 | 2030       | kr 83 332,83 | kr 438 024,74   | kr 448 975,36   | 2030      | 4              | kr 150 000,00 | kr 2 791 418,08     | kr 2 734 594,33       | 2030 | 4              | kr 12 624,77 | kr 59 090,68  | kr 60 567,94  |   |   |
| 11 | 2031       | kr 83 332,83 | kr 532 308,19   | kr 545 615,90   | 2031      | 5              | kr 150 000,00 | kr 2 734 594,33     | kr 2 675 766,11       | 2031 | 5              | kr 13 382,26 | kr 73 950,20  | kr 75 798,95  |   |   |
| 12 | 2032       | kr 83 332,83 | kr 628 948,73   | kr 644 672,45   | 2032      | 6              | kr 150 000,00 | kr 2 675 766,11     | kr 2 614 862,73       | 2032 | 6              | kr 14 185,19 | kr 89 984,14  | kr 92 233,75  |   |   |
| 13 | 2033       | kr 83 332,83 | kr 728 005,28   | kr 746 205,41   | 2033      | 7              | kr 150 000,00 | kr 2 614 862,73     | kr 2 551 810,97       | 2033 | 7              | kr 15 036,30 | kr 107 270,05 | kr 109 951,80 |   |   |
| 14 | 2034       | kr 83 332,83 | kr 829 538,24   | kr 850 276,70   | 2034      | 8              | kr 150 000,00 | kr 2 551 810,97     | kr 2 486 535,05       | 2034 | 8              | kr 15 938,48 | kr 125 890,28 | kr 129 037,54 |   |   |
| 15 | 2035       | kr 83 332,83 | kr 933 609,53   | kr 956 949,77   | 2035      | 9              | kr 150 000,00 | kr 2 486 535,05     | kr 2 418 956,53       | 2035 | 9              | kr 16 894,79 | kr 145 932,33 | kr 149 580,64 |   |   |
| 16 | 2036       | kr 83 332,83 | kr 1 040 282,60 | kr 1 066 289,67 | 2036      | 10             | kr 150 000,00 | kr 2 418 956,53     | kr 2 348 994,16       |      |                |              |               |               |   |   |
| 17 | 2037       | kr 83 332,83 | kr 1 149 622,50 | kr 1 178 363,06 | 2037      | 11             | kr 150 000,00 | kr 2 348 994,16     | kr 2 276 563,87       |      |                |              |               |               |   |   |
| 18 | 2038       | kr 83 332,83 | kr 1 261 695,89 | kr 1 293 238,29 | 2038      | 12             | kr 150 000,00 | kr 2 276 563,87     | kr 2 201 578,59       |      |                |              |               |               |   |   |
| 19 | 2039       | kr 83 332,83 | kr 1 376 571,12 | kr 1 410 985,40 | 2039      | 13             | kr 150 000,00 | kr 2 201 578,59     | kr 2 123 948,20       |      |                |              |               |               |   |   |
| 20 | 2040       | kr 83 332,83 | kr 1 494 318,23 | kr 1 531 676,19 | 2040      | 14             | kr 150 000,00 | kr 2 123 948,20     | kr 2 043 579,39       |      |                |              |               |               |   |   |
| 21 | 2041       | kr 83 332,83 | kr 1 615 009,02 | kr 1 655 384,24 | 2041      | 15             | kr 150 000,00 | kr 2 043 579,39     | kr 1 960 375,56       |      |                |              |               |               |   |   |
| 22 | 2042       | kr 83 332,83 | kr 1 738 717,08 | kr 1 782 185,00 | 2042      | 16             | kr 150 000,00 | kr 1 960 375,56     | kr 1 874 236,71       |      |                |              |               |               |   |   |
| 23 | 2043       | kr 83 332,83 | kr 1 865 517,84 | kr 1 912 155,78 | 2043      | 17             | kr 150 000,00 | kr 1 874 236,71     | kr 1 785 059,31       |      |                |              |               |               |   |   |
| 24 | 2044       | kr 83 332,83 | kr 1 995 488,61 | kr 2 045 375,83 | 2044      | 18             | kr 150 000,00 | kr 1 785 059,31     | kr 1 692 736,16       |      |                |              |               |               |   |   |
| 25 | 2045       | kr 83 332,83 | kr 2 128 708,66 | kr 2 181 928,38 | 2045      | 19             | kr 150 000,00 | kr 1 692 736,16     | kr 1 597 156,31       |      |                |              |               |               |   |   |
| 26 | 2046       | kr 83 332,83 | kr 2 265 259,21 | kr 2 321 890,69 | 2046      | 20             | kr 150 000,00 | kr 1 597 156,31     | kr 1 498 204,87       |      |                |              |               |               |   |   |
| 27 | 2047       | kr 83 332,83 | kr 2 405 223,52 | kr 2 465 354,11 | 2047      | 21             | kr 150 000,00 | kr 1 498 204,87     | kr 1 395 762,91       |      |                |              |               |               |   |   |
| 28 | 2048       | kr 83 332,83 | kr 2 548 686,94 | kr 2 612 404,11 | 2048      | 22             | kr 150 000,00 | kr 1 395 762,91     | kr 1 289 707,31       |      |                |              |               |               |   |   |
| 29 | 2049       | kr 83 332,83 | kr 2 696 736,95 | kr 2 763 130,37 | 2049      | 23             | kr 150 000,00 | kr 1 289 707,31     | kr 1 179 910,58       |      |                |              |               |               |   |   |
| 30 | 2050       | kr 83 332,83 | kr 2 846 463,20 | kr 2 917 624,78 | 2050      | 24             | kr 150 000,00 | kr 1 179 910,58     | kr 1 066 240,76       |      |                |              |               |               |   |   |
| 31 | 2051       | kr 83 332,83 | kr 3 000 957,61 | kr 3 075 981,55 | 2051      | 25             | kr 150 000,00 | kr 1 066 240,76     | kr 948 561,23         |      |                |              |               |               |   |   |
| 32 | 2052       | kr 83 332,83 | kr 3 159 314,39 | kr 3 238 297,25 | 2052      | 26             | kr 150 000,00 | kr 948 561,23       | kr 826 730,55         |      |                |              |               |               |   |   |
| 33 | 2053       | kr 83 332,83 | kr 3 321 630,08 | kr 3 404 670,83 | 2053      | 27             | kr 150 000,00 | kr 826 730,55       | kr 700 602,28         |      |                |              |               |               |   |   |
| 34 | 2054       | kr 83 332,83 | kr 3 488 003,66 | kr 3 575 203,75 | 2054      | 28             | kr 150 000,00 | kr 700 602,28       | kr 570 024,82         |      |                |              |               |               |   |   |
| 35 | 2055       | kr 83 332,83 | kr 3 658 536,59 | kr 3 750 000,00 | 2055      | 29             | kr 150 000,00 | kr 570 024,82       | kr 434 841,23         |      |                |              |               |               |   |   |
| 36 |            |              |                 |                 | 2056      | 30             | kr 150 000,00 | kr 434 841,23       | kr 294 889,03         |      |                |              |               |               |   |   |
| 37 |            |              |                 |                 | 2057      | 31             | kr 150 000,00 | kr 294 889,03       | kr 150 000,00         |      |                |              |               |               |   |   |
| 38 |            |              |                 |                 | 2058      | 32             | kr 150 000,00 | kr 150 000,00       | (0,00)                |      |                |              |               |               |   |   |
| 39 |            |              |                 |                 |           |                |               |                     |                       |      |                |              |               |               |   |   |
| 40 |            |              |                 |                 |           |                |               |                     |                       |      |                |              |               |               |   |   |
| 41 |            |              |                 |                 |           |                |               |                     |                       |      |                |              |               |               |   |   |

Figur 8: Regneark for løsning av Noras sparing og lån

| Oppgave a  |              |              |                 |  | Oppgave b |                |               |                     |                              | Oppgave c |                |              |              |                 |
|------------|--------------|--------------|-----------------|--|-----------|----------------|---------------|---------------------|------------------------------|-----------|----------------|--------------|--------------|-----------------|
| Rente      | 2,50 %       |              |                 |  | Rente     | 3,53 %         |               |                     |                              | Rente     | 2,50 %         |              |              |                 |
| Sparebeløp | kr 85 416,15 |              |                 |  |           |                |               |                     |                              |           |                |              |              |                 |
| År         | Sparebeløp   | Konto 1. jan | Konto 31. des   |  | År        | År etter start | Terminbeløp   | Restlån før innbet. | Restlån etter innbet.        | År        | År etter start | Sparebeløp   | Konto 1. jan | Konto 31. des   |
| 2026       | =C\$5        | =C8          | =D8*(1+\$C\$4)  |  | 2026      | 0              | kr 150 000,00 | kr 3 000 000,00     | =J8-I8/(1+\$I\$4)^(32-H8)    | 2026      | 0              | kr 10 000,00 | =O8          | =P8*(1+\$N\$4)  |
| 2027       | =C\$5        | =+E8+C9      | =D9*(1+\$C\$4)  |  | 2027      | 1              | =+I8          | =+K8                | =J9-I9/(1+\$I\$4)^(32-H9)    | 2027      | 1              | =O8*1,06     | =+Q8+O9      | =P9*(1+\$N\$4)  |
| 2028       | =C\$5        | =+E9+C10     | =D10*(1+\$C\$4) |  | 2028      | 2              | =+I9          | =+K9                | =J10-I10/(1+\$I\$4)^(32-H10) | 2028      | 2              | =O9*1,06     | =+Q9+O10     | =P10*(1+\$N\$4) |
| 2029       | =C\$5        | =+E10+C11    | =D11*(1+\$C\$4) |  | 2029      | 3              | =+I10         | =+K10               | =J11-I11/(1+\$I\$4)^(32-H11) | 2029      | 3              | =O10*1,06    | =+Q10+O11    | =P11*(1+\$N\$4) |
| 2030       | =C\$5        | =+E11+C12    | =D12*(1+\$C\$4) |  | 2030      | 4              | =+I11         | =+K11               | =J12-I12/(1+\$I\$4)^(32-H12) | 2030      | 4              | =O11*1,06    | =+Q11+O12    | =P12*(1+\$N\$4) |
| 2031       | =C\$5        | =+E12+C13    | =D13*(1+\$C\$4) |  | 2031      | 5              | =+I12         | =+K12               | =J13-I13/(1+\$I\$4)^(32-H13) | 2031      | 5              | =O12*1,06    | =+Q12+O13    | =P13*(1+\$N\$4) |
| 2032       | =C\$5        | =+E13+C14    | =D14*(1+\$C\$4) |  | 2032      | 6              | =+I13         | =+K13               | =J14-I14/(1+\$I\$4)^(32-H14) | 2032      | 6              | =O13*1,06    | =+Q13+O14    | =P14*(1+\$N\$4) |
| 2033       | =C\$5        | =+E14+C15    | =D15*(1+\$C\$4) |  | 2033      | 7              | =+I14         | =+K14               | =J15-I15/(1+\$I\$4)^(32-H15) | 2033      | 7              | =O14*1,06    | =+Q14+O15    | =P15*(1+\$N\$4) |
| 2034       | =C\$5        | =+E15+C16    | =D16*(1+\$C\$4) |  | 2034      | 8              | =+I15         | =+K15               | =J16-I16/(1+\$I\$4)^(32-H16) | 2034      | 8              | =O15*1,06    | =+Q15+O16    | =P16*(1+\$N\$4) |
| 2035       | =C\$5        | =+E16+C17    | =D17*(1+\$C\$4) |  | 2035      | 9              | =+I16         | =+K16               | =J17-I17/(1+\$I\$4)^(32-H17) | 2035      | 9              | =O16*1,06    | =+Q16+O17    | =P17*(1+\$N\$4) |
| 2036       | =C\$5        | =+E17+C18    | =D18*(1+\$C\$4) |  | 2036      | 10             | =+I17         | =+K17               | =J18-I18/(1+\$I\$4)^(32-H18) |           |                |              |              |                 |
| 2037       | =C\$5        | =+E18+C19    | =D19*(1+\$C\$4) |  | 2037      | 11             | =+I18         | =+K18               | =J19-I19/(1+\$I\$4)^(32-H19) |           |                |              |              |                 |
| 2038       | =C\$5        | =+E19+C20    | =D20*(1+\$C\$4) |  | 2038      | 12             | =+I19         | =+K19               | =J20-I20/(1+\$I\$4)^(32-H20) |           |                |              |              |                 |
| 2039       | =C\$5        | =+E20+C21    | =D21*(1+\$C\$4) |  | 2039      | 13             | =+I20         | =+K20               | =J21-I21/(1+\$I\$4)^(32-H21) |           |                |              |              |                 |
| 2040       | =C\$5        | =+E21+C22    | =D22*(1+\$C\$4) |  | 2040      | 14             | =+I21         | =+K21               | =J22-I22/(1+\$I\$4)^(32-H22) |           |                |              |              |                 |
| 2041       | =C\$5        | =+E22+C23    | =D23*(1+\$C\$4) |  | 2041      | 15             | =+I22         | =+K22               | =J23-I23/(1+\$I\$4)^(32-H23) |           |                |              |              |                 |
| 2042       | =C\$5        | =+E23+C24    | =D24*(1+\$C\$4) |  | 2042      | 16             | =+I23         | =+K23               | =J24-I24/(1+\$I\$4)^(32-H24) |           |                |              |              |                 |
| 2043       | =C\$5        | =+E24+C25    | =D25*(1+\$C\$4) |  | 2043      | 17             | =+I24         | =+K24               | =J25-I25/(1+\$I\$4)^(32-H25) |           |                |              |              |                 |
| 2044       | =C\$5        | =+E25+C26    | =D26*(1+\$C\$4) |  | 2044      | 18             | =+I25         | =+K25               | =J26-I26/(1+\$I\$4)^(32-H26) |           |                |              |              |                 |
| 2045       | =C\$5        | =+E26+C27    | =D27*(1+\$C\$4) |  | 2045      | 19             | =+I26         | =+K26               | =J27-I27/(1+\$I\$4)^(32-H27) |           |                |              |              |                 |
| 2046       | =C\$5        | =+E27+C28    | =D28*(1+\$C\$4) |  | 2046      | 20             | =+I27         | =+K27               | =J28-I28/(1+\$I\$4)^(32-H28) |           |                |              |              |                 |
| 2047       | =C\$5        | =+E28+C29    | =D29*(1+\$C\$4) |  | 2047      | 21             | =+I28         | =+K28               | =J29-I29/(1+\$I\$4)^(32-H29) |           |                |              |              |                 |
| 2048       | =C\$5        | =+E29+C30    | =D30*(1+\$C\$4) |  | 2048      | 22             | =+I29         | =+K29               | =J30-I30/(1+\$I\$4)^(32-H30) |           |                |              |              |                 |
| 2049       | =C\$5        | =+E30+C31    | =D31*(1+\$C\$4) |  | 2049      | 23             | =+I30         | =+K30               | =J31-I31/(1+\$I\$4)^(32-H31) |           |                |              |              |                 |
| 2050       | =C\$5        | =+E31+C32    | =D32*(1+\$C\$4) |  | 2050      | 24             | =+I31         | =+K31               | =J32-I32/(1+\$I\$4)^(32-H32) |           |                |              |              |                 |
| 2051       | =C\$5        | =+E32+C33    | =D33*(1+\$C\$4) |  | 2051      | 25             | =+I32         | =+K32               | =J33-I33/(1+\$I\$4)^(32-H33) |           |                |              |              |                 |
| 2052       | =C\$5        | =+E33+C34    | =D34*(1+\$C\$4) |  | 2052      | 26             | =+I33         | =+K33               | =J34-I34/(1+\$I\$4)^(32-H34) |           |                |              |              |                 |
| 2053       | =C\$5        | =+E34+C35    | =D35*(1+\$C\$4) |  | 2053      | 27             | =+I34         | =+K34               | =J35-I35/(1+\$I\$4)^(32-H35) |           |                |              |              |                 |
| 2054       | =C\$5        | =+E35+C36    | =D36*(1+\$C\$4) |  | 2054      | 28             | =+I35         | =+K35               | =J36-I36/(1+\$I\$4)^(32-H36) |           |                |              |              |                 |
| 2055       | =C\$5        | =+E36+C37    | =D37*(1+\$C\$4) |  | 2055      | 29             | =+I36         | =+K36               | =J37-I37/(1+\$I\$4)^(32-H37) |           |                |              |              |                 |
|            |              |              |                 |  | 2056      | 30             | =+I37         | =+K37               | =J38-I38/(1+\$I\$4)^(32-H38) |           |                |              |              |                 |
|            |              |              |                 |  | 2057      | 31             | =+I38         | =+K38               | =J39-I39/(1+\$I\$4)^(32-H39) |           |                |              |              |                 |
|            |              |              |                 |  | 2058      | 32             | =+I39         | =+K39               | =J40-I40/(1+\$I\$4)^(32-H40) |           |                |              |              |                 |

Figur 9: Formler for regneark med målsøking

## Oppgave 2-5

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Det kan vises at

$$\int 1 \, dx + \int x \, dx + \int x^2 \, dx + \int x^3 \, dx + \dots = \int \frac{1}{1-x} \, dx$$

Bruk denne sammenhengen til å vise at

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2$$

I denne oppgaven kan du se bort fra integrasjonskonstantene.

### ✓ Løsningsforslag

Vi har fått oppgitt at

$$\int 1 \, dx + \int x \, dx + \int x^2 \, dx + \int x^3 \, dx + \dots = \int \frac{1}{1-x} \, dx \quad (1)$$

Vi gjennomfører resonnementet vårt i flere steg.

### Integrasjon av høyre side

Vi ser først på høyre side av likning (1). Vi ser at vi kan integrere denne siden ved å gjøre variabelskiftet  $u = 1 - x \implies \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -1 \cdot du$ .

Integralet blir (sett bort fra integrasjonskonstantene)

$$\int \frac{1}{1-x} \, dx = \int \frac{1}{u} \cdot (-1) \, du = - \int \frac{1}{u} \, du = -\ln|1-x|$$

### Integrasjon av venstre side

Vi gjennomfører så integrasjonene på venstre side av likning (1) og får

$$\int 1 \, dx + \int x \, dx + \int x^2 \, dx + \int x^3 \, dx + \dots = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

Ved å integrere begge sidene av likning (1) har vi altså foreløpig vist at:

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots = -\ln|1-x|$$

### Vise at rekka er lik $\ln 2$

Vi skal vise at

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2 \quad (2)$$

Vi sammenligner venstre side i likning (2) med svaret vi fikk da vi integrerte venstre side i likning (1).

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots \quad (3)$$

Ved sammenligning av leddene ser vi at  $x = \frac{1}{2}$  er en løsning av likning (3).

Siden  $x = \frac{1}{2}$ , så sjekker vi hva  $-\ln|1-x|$  gir oss når  $x = \frac{1}{2}$

$$-\ln|1-x| = -\ln\left|1 - \frac{1}{2}\right| = -\ln \underbrace{\left|\frac{1}{2}\right|}_{\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{-(\ln 1 - \ln 2)}_{\text{Regel: } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b} = \ln 2$$

Vi har altså vist at

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots = -\ln|1-x|$$

Og for  $x = \frac{1}{2}$  gjelder derfor:

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2 \quad \blacksquare$$